

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E
INGENIERIAS



IMPLEMENTACIÓN DE CAVIDADES FABRY-PEROT
EN EL PROTOTIPO SIMULADOR DE DETECCIÓN DE
ONDAS GRAVITACIONALES

TESIS

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRONICA Y
COMPUTACION

PRESENTA
LINA MARIA AGUILAR LOBO

DIRECTOR
Dra. CLAUDIA MORENO GONZALEZ

CO-DIRECTOR
Dr. GUILLERMO GARCIA TORALES

Guadalajara, Jalisco a 22 de octubre de 2010

*A mi preciosa muñeca tapatía,
mi tesoro mas valioso*

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Judith y Heriberto, quienes con muchos sacrificios lograron hacer de mi y de mis hermanos seres humanos con valores, cultura y educación. Gracias a los dos por haberme apoyado en todas mis decisiones, por haber dado todo lo que estaba a su alcance para que yo alcanzara mis metas

A mi hermano Nano, por su incondicional apoyo en los buenos y malos momentos.

A mi hermana Monica por haber estado presente en el momento más importante de mi vida.

A la Dra. Claudia Moreno por haberme dado la oportunidad de trabajar con ella, por su apoyo en mis presentaciones académicas y en la maestría, su paciencia, por su amistad y por haberme hecho sentir como parte de su familia.

Al Dr. Guillermo Garcia por sus conocimientos, sus palabras, su paciencia y su apoyo durante mi proyecto y toda la maestría.

Al Dr. Jorge Luis Flores por sus conocimientos y toda su colaboración.

A Yenny mi gran amiga, quien siempre me ha apoyado en todas mis decisiones y ha estado presente de corazón en cada momento importante de mi vida.

A Andrea por su gran apoyo en las buenas y en las malas y por habernos aceptado a mi y a mi hija su casa que la sentimos nuestra. A Sofia por tanto cariño y amor hacia mi hija y por alegrarme tanto con sus palabras.

A Eduard y Jaime por haberme apoyado y acompañado en muchos momentos importantes.

A la Mtra. Claudine, Dr. Gualberto Solis, Dr. Marco Perez, Dr. Malik Rakhmanov, Mtro Jaime Almaguer, Daniel, Catalina, Liliana, Federico, Griselda, Marisol, Chirino, Miguel, quienes de diferentes formas me colaboraron para alcanzar esta meta.

A mis tíos, primos, abuelos, todas esas personas de mi familia quienes a lo largo de estos dos años estuvieron cerca de mi a través de mails y videollamadas.

Índice general

1. Introducción	1
2. Ondas gravitacionales	4
2.1. Ecuaciones de Einstein, teoría linealizada y definición de onda gravitacional	4
2.2. Fuentes de ondas gravitacionales	8
2.3. Detectores de ondas gravitacionales	8
2.3.1. Detectores de Masa Resonante	9
2.3.2. Detectores por interferometría láser	9
2.4. Detectores de Ondas Gravitacionales por Interferometría láser	10
2.4.1. Interferómetro de Michelson	10
2.4.2. Interferómetro de Michelson como detector de ondas gravitacionales	13
2.4.3. Respuesta en frecuencia	14
2.4.4. Fuentes de ruido en un interferómetro	18
3. Cavity Fabry-Perot	22
3.1. Características y planos de referencia de una cavity Fabry-Perot	22
3.2. Ecuaciones de campo	24
3.3. Solución estática	29
3.4. Solución dinámica	33
3.5. Respuesta de estado estable	34
3.5.1. Cavity Fabry-Perot como un operador lineal	34

3.5.2.	Respuesta de la cavidad Fabry-Perot a la amplitud del láser	36
3.5.3.	Respuesta de la cavidad Fabry-Perot a la frecuencia y fase del láser	39
3.5.4.	Respuesta de la cavidad Fabry-Perot a las variaciones en la longitud de la cavidad	43
3.5.5.	Función de transferencia frecuencia-longitud	44
3.5.6.	Espejos suspendidos como un cuerpo rígido	45
3.5.7.	Lagrangiano para un espejo suspendido	46
3.5.8.	Ecuaciones de movimiento	51
4.	Interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot	55
4.1.	Distancias y propagación de campos	55
4.1.1.	Ecuaciones de campos	57
4.1.2.	Franjas en el interferómetro de Michelson	59
4.1.3.	Condición de Franja Oscura	62
4.2.	Respuesta del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot	63
4.2.1.	Respuesta a variaciones en la amplitud del láser	63
4.2.2.	Respuesta a variaciones en la fase del láser	64
4.2.3.	Respuesta al movimiento de los espejos de las cavidades Fabry-Perot	65
5.	Simulación del prototipo de detección de OG	67
5.1.	Características y parámetros del prototipo	67
5.2.	Parámetros del detector de OG LIGO	69
5.3.	Simulación de una cavidad Fabry-Perot	70
5.3.1.	Simulación del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot	72
5.4.	Perspectivas del montaje experimental del prototipo de interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot	73
6.	Conclusiones	76

Índice de figuras

2.1. Polarización de Ondas Gravitacionales	7
2.2. Algunas posibles fuentes de OG	8
2.3. Detector de Ondas Gravitacionales por interferometría láser	11
2.4. Interferómetro de Michelson con la técnica Delay Line en sus brazos. En este caso el haz del láser realiza cuatro rebotes entre los espejos, por lo tanto $N_{DL} = 4$	16
2.5. Interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot en sus brazos	17
3.1. Diagrama esquemático de una cavidad Fabry-Perot	23
3.2. Posición de los espejos y planos de referencia	24
3.3. Campos en una cavidad Fabry-Perot	25
3.4. Formación de los campos transmitidos y reflejados en una cavidad Fabry-Perot	27
3.5. Recorridos de vuelta completa de los fotones en una cavidad Fabry- Perot	30
3.6. Diagrama de Bode de la Función $H(s)$	37
3.7. Dimensiones de un espejo de un detector de OGs	46
3.8. Dimensiones de un espejo de un detector de OG	47
3.9. Movimiento <i>planar</i> del espejo visto desde un lado. Movimiento del espejo visto desde arriba	47
4.1. Campos en una cavidad Fabry-Perot	56
4.2. Campos en un interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot	57
4.3. Dimensiones de un espejo de un detector de OG.	60

5.1. Prototipo de interferómetro de Michelson	69
5.2. Diagrama esquemático de una cavidad Fabry-Perot	71
5.3. Franjas de interferencia en la salida de una cavidad Fabry-Perot . . .	71
5.4. Fracción de intensidad de campo en la salida de una cavidad Fabry-Perot	72
5.5. Franjas de interferencia en el puerto antisimétrico del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot.	73
5.6. Franjas de interferencia en el puerto antisimétrico del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot cuando hay diferencia de camino óptico entre éstas	73
5.7. Franjas de interferencia en el puerto antisimétrico del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot cuando hay diferencia de camino óptico entre éstas	74
5.8. Diagrama esquemático de la propuesta del prototipo simulador de detección de OG	75

Indice de tablas

2.1. Detectores de OG de masa resonante	9
2.2. Detectores de OG por interferometría láser	10
5.1. Parámetros del láser de entrada	68
5.2. Parámetros de los espejos	68
5.3. Parámetros de las cavidades Fabry-Perot	68
5.4. Parámetros del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot	68
5.5. Parámetros del láser	69
5.6. Parámetros de los espejos	69
5.7. Parámetros de las cavidades Fabry-Perot	70
5.8. Parámetros del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot	70

Capítulo 1

Introducción

Albert Einstein en su teoría linealizada de la relatividad general (1916) predijo la existencia de las Ondas Gravitacionales (OG) [1]-[2]; las OG son definidas como perturbaciones o distorsiones en el espacio-tiempo producidas por objetos gravitacionales masivos en movimiento (ya sea que se aceleren o cambien bruscamente su geometría). Las OG pueden ser producidas por sistemas binarios, explosiones de supernovas, colisión de agujeros negros y el propio origen del universo (Big-Bang) [3]-[4], entre otros.

En 1959 Joseph Weber [5] fue el primer físico que se dedicó a diseñar y construir un detector de OG, proponiendo como primera iniciativa el detector de masa resonante. Su experimento consistió en construir una barra cilíndrica de aluminio de aproximadamente 1.5 toneladas, la cual aislaba acústicamente suspendiéndola por medio de un alambre e introduciéndolo en una cámara de vacío. En este detector al incidir una OG que coincidiera con la frecuencia de resonancia natural de la barra, aumentaría el efecto de la OG al atravesar la barra y el tiempo de duración de tal efecto. Weber anuncia en 1969, la detección de una OG [6] con lo cual se motivaron varios investigadores en el tema, pero después de realizar diversas pruebas con diferentes detectores de masa resonante, concluyeron que Weber solo había detectado ruido.

Después que la comunidad científica aceptara que podrían detectarse las OG por métodos experimentales, se iniciaron investigaciones con diferentes tipos de detectores.

El diseño más prometedor de detección de OG era diseñado por interferometría láser; el pionero en este trabajo fue Bob Forward [7], quien construyó un detector de OG basado en el interferómetro de Michelson [8].

El funcionamiento del detector por interferometría láser es el siguiente: cuando incide una OG en el interferómetro, se ejerce una fuerza sobre los espejos produciéndose una diferencia de camino óptico en el haz del láser, esto generará una variación en el patrón de interferencia proporcional a esta diferencia. Los detectores de OG por interferometría láser son los que tienen mayor apoyo a nivel mundial, debido a la geometría de las fuerzas producidas por ellas[9], ya que el interferómetro es sensible al movimiento diferencial entre sus brazos, y también por su sensibilidad al movimiento diferencial de los espejos [10]. Dentro de la primera generación de detectores por interferometría láser están LIGO [11], TAMA300 [12], GEO600 [13] y VIRGO [14], entre otros.

Sin embargo, debido al pequeño valor de la intensidad de una OG esperada ($h \sim 10^{-21}$), la longitud de los brazos en el interferómetro debe ser de cientos de kilómetros, una condición difícil de lograr debido a múltiples factores, entre los cuales se encuentran el relieve de la tierra y los altos costos de construcción, entre otros. Actualmente en los detectores por interferometría láser se han desarrollado dos técnicas para aumentar la longitud efectiva de los brazos del interferómetro, estas son Delay Line [15] y la cavidad Fabry-Perot [16].

La cavidad Fabry-Perot es actualmente la técnica más empleada en los detectores de OG, debido a que presenta un esquema simple que contiene dos espejos que permiten que el haz del láser realice interferencia de múltiples haces entre ellos. El esquema de una cavidad Fabry-Perot consiste en dos espejos paralelos, uno de ellos parcialmente transmisor (espejo de entrada) entre los cuales el haz del láser circula entre ellos [17]. Cuando incide el haz del láser en el espejo de entrada con un ángulo de incidencia muy pequeño, una parte se refleja y la otra se transmite haciendo recorridos de vuelta completa entre los dos espejos, estas múltiples reflexiones entre los espejos producen haces de luz que emergen del espejo de entrada y producen interferencia con el haz reflejado inicialmente, produciéndose de esta forma, las franjas de interferencia en la salida de la cavidad [2]. Este número de reflexiones internas dentro de la cavidad Fabry-Perot es proporcional al incremento de la longitud efectiva del brazo en el detector de OG.

Debido a los altos costos necesarios para la construcción de detectores de OG, diversos grupos de investigación trabajan en prototipos de detectores de OG por interferometría láser, es el caso de nuestro Centro Universitario de ciencias exactas e ingenierías CUCEI, donde se ha diseñado y construido un prototipo simulador de detección de OG rígido basado en el interferómetro de Michelson. En él se simula mediante plataformas motorizadas, el efecto que produciría una OG incidiendo en el prototipo, con el cual se logro el objetivo de mostrar a la comunidad universitaria

la importancia multidisciplinaria de este proyecto.

En este proyecto de tesis, haremos el análisis de la implementación de dos cavidades Fabry-Perot dentro del prototipo simulador ya construido, con las cuales pretendemos alcanzar una amplificación del haz del láser, disminuir ruidos [18] y lograr una extensión de la longitud efectiva de los brazos del interferómetro [19], lo cual nos permitirá una caracterización más eficiente a pequeña escala de nuestro prototipo. Presentaremos en detalle las ecuaciones que definen el campo en una cavidad Fabry-Perot y su respuesta a las variaciones en los parámetros de amplitud, frecuencia y fase del láser y la longitud de la cavidad. Posteriormente analizaremos y simularemos la respuesta de un interferómetro de Michelson con dos cavidades Fabry-Perot en sus brazos y obtendremos los parámetros que caracterizan nuestro prototipo.

Capítulo 2

Ondas gravitacionales

Una OG se define como una perturbación de la curvatura espacio-tiempo que se propaga a través del universo a la velocidad de la luz, su existencia fué predicha por Albert Einstein en su Teoría de la Relatividad General (RG) [1, 2, 3] y confirmada después de la observación del pulsar binario PSR 1913+16 [4, 5, 6] descubierto por R.A. Hulse y J. H. Taylor en 1974. Sin embargo, las OG no se han podido detectar directamente debido a que son muy débiles, no son absorbidas por la materia, lo que hace que sea difícil crear una antena receptora de OG. La RG predice que las OG son emitidas por grandes objetos estelares, siendo estas ondas las soluciones especiales de las ecuaciones de campo de la teoría linealizada de la RG. Estas soluciones fueron encontradas por Einstein en 1916 [15], pero no atrajo mucha atención hasta finales de los años 50's cuando se construyó el primer detector de OG, sin embargo, hasta la fecha no ha sido posible detectarlas experimentalmente. En este capítulo revisaremos las soluciones de onda de la ecuación de Einstein, la teoría linealizada, la definición matemática, polarización y fuentes de una OG y los tipos de detectores.

2.1. Ecuaciones de Einstein, teoría linealizada y definición de onda gravitacional

En la Teoría de la Relatividad Especial (RE), el intervalo espacio-tiempo ds entre dos puntos vecinos está dado por la expresión

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.1}$$

o

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.2}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski para un espacio-tiempo plano, la cual está dada en coordenadas cartesianas por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

En la ecuación (2.2) los índices μ y ν indican el rango de 0 a 3 para representar t , x , y y z , respectivamente. El mismo concepto físico es aplicado en la Teoría de la RG, con la única diferencia que el espacio-tiempo no es limitado necesariamente al espacio-tiempo plano descrito por la métrica de Minkowski, pero en general, se curva para representar lo que llamamos gravitación. La expresión general para definir el espacio-tiempo está definida para este caso por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

donde toda la información acerca de la curvatura del espacio-tiempo es representada en la métrica $g_{\mu\nu}$. Gran parte de la física puede ser representada con la ecuación (2.4). Sin embargo, para nuestro proyecto sólo necesitamos entender un caso especial, el de una pequeña perturbación en el espacio-tiempo plano. Con lo cual la métrica será representada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

donde $h_{\mu\nu}$ representa la perturbación métrica fuera del espacio de Minkowski. Basándonos en la métrica $g_{\mu\nu}$, las ecuaciones de campo gravitacional de la RG, tienen la forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

es el tensor de Einstein[1, 2], que describe la geometría del espacio tiempo a partir de la métrica de Minkowski, $R_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de Riemann, R es el escalar de curvatura, Λ es la llamada constante cosmológica y $T_{\mu\nu}$ representa el tensor de energía-momento[2]. Con $\Lambda = 0$ y $\kappa = 8\pi G/c^4$, la ecuación (2.6) toma la forma general

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton.

Debido a que es difícil resolver la ecuación de Einstein analíticamente, la naturaleza del campo gravitacional es investigada por medio de la ecuación linealizada. Tomando la ecuación (2.5) donde se tiene en cuenta la perturbación métrica de Minkowski para el espacio-tiempo plano $h_{\mu\nu}$, y teniendo en cuenta la ecuación 2.3 donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de un espacio-tiempo plano, se define ahora el tensor de traza inversa $\bar{h}_{\mu\nu}$ de $h_{\mu\nu}$ por

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (2.9)$$

donde

$$h \equiv h_{\alpha}^{\alpha}, \quad (2.10)$$

con lo cual por medio de un desarrollo matemático detallado en [16] se obtiene la ecuación linealizada de Einstein, la cual está dada por

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

donde

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \Delta. \quad (2.12)$$

Mas detalle de esta ecuación se puede ver en [20].

Partiendo de la ecuación linealizada de Einstein (2.11), con la condición de vacío con $T_{\mu\nu} = 0$, es decir con

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.13)$$

se obtiene una solución de onda plana dada por

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha}x_{\alpha}), \quad (2.14)$$

donde el número de onda y la amplitud deben satisfacer las siguientes condiciones

$$A^{\mu\nu}k_{\nu} = 0, \quad (2.15)$$

$$k_{\mu}k^{\mu} = 0. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.15) y (2.16) muestran que la solución de onda plana de la ecuación (2.14) es una onda transversal que se propaga a la velocidad de la luz [16]. Esta onda plana es llamada una *Onda Gravitacional*.

Cuando la parte del espacio del vector de número de onda k_i es paralelo al eje z , es decir, la onda se propaga paralela al eje z , el tensor de perturbación es representado por

$$\overline{h_{\alpha\beta}} = A_{\mu\nu} e^{ik(ct-z)}, \quad (2.17)$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde h_+ y h_x representan la polarización de la OG. Cuando h_x es igual a cero, la OG es llamada *polarizada-mas* o polarización h_+ y cuando $h_+ = 0$ es llamada *polarizada-cruz* o polarización h_x .

Para entender como se manifiesta físicamente los dos estados de polarización de una OG, consideremos un anillo circular de partículas que se encuentran en un plano ortogonal a la dirección de propagación de una OG, el estado de polarización h_+ , alargará y comprimirá el anillo de partículas a lo largo de direcciones ortogonales, tal como se muestra en la Figura 2.1, mientras que el estado de polarización h_x producirá el mismo efecto de alargar y comprimir el anillo de partículas pero a lo largo de direcciones que están rotadas 45 grados ($\pi/4$ radianes) con respecto a las direcciones de deformación del estado h_+ , este efecto también puede observarse en la Figura 2.1.

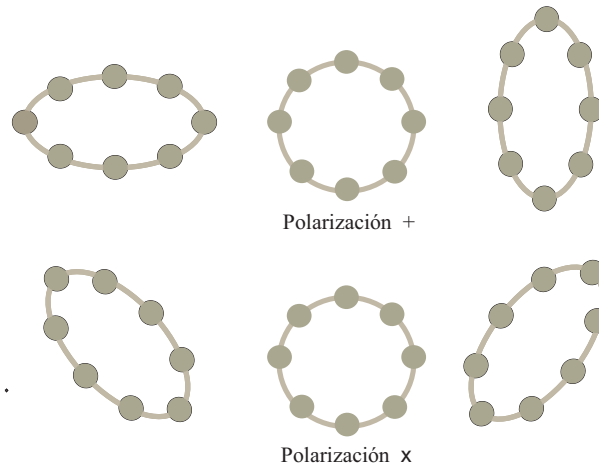


Figura 2.1: Polarización de Ondas Gravitacionales

2.2. Fuentes de ondas gravitacionales

Las principales fuentes de OG están clasificadas por la forma de onda: ondas explosivas, ondas periódicas y ondas estocásticas [3, 21, 22, 23].

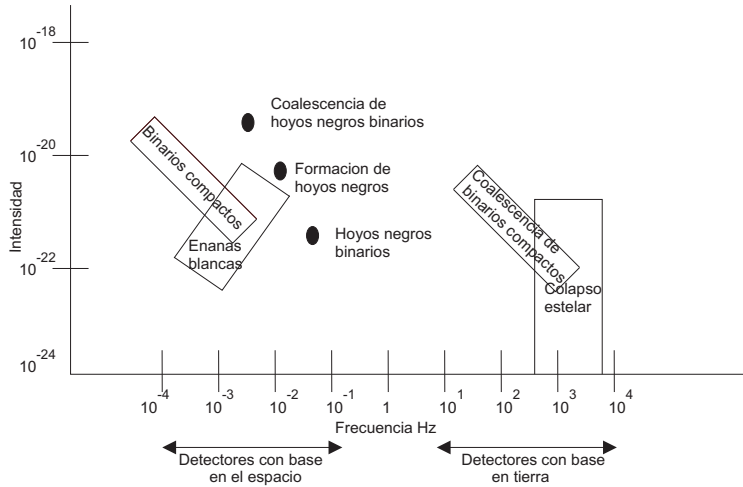


Figura 2.2: Algunas posibles fuentes de OG

2.3. Detectores de ondas gravitacionales

Actualmente los detectores de OG se dividen en dos grandes grupos, el primer grupo es llamado detectores de masa resonante y el segundo corresponde a los detectores por interferometría laser. Sin embargo, hasta el momento las OG no se han detectado directamente, pero si hay evidencias indirectas de su existencia gracias al trabajo realizado por R. A. Hulse y J. H. Taylor [4, 5, 6, 24], quienes estudiaron el sistema binario PSR 1913+16, el cual consiste en un pulsar describiendo una órbita elíptica alrededor del otro. Su trabajo consistió en detectar en 1974 y hacer seguimiento durante 14 años del pulsar PSR 1913+16 ubicado en la constelación de *el águila*. En 1983 divulgaron que habían detectado una disminución en el período orbital, lo que indicaba a su vez una pérdida de energía debida a la radiación de OG. Este cambio observado en el período orbital, está de acuerdo con las predicciones de la Teoría de la RG. Gracias a su trabajo, Hulse y Taylor fueron galardonados con el premio Nobel de Física en 1993 [25].

2.3.1. Detectores de Masa Resonante

Durante la década de los 60's Joseph Weber construyó la primera antena que operaba como detector de OG. Weber diseñó dos detectores cilíndricos de aluminio ubicados en lugares separados con el fin de reconocer como OG, a aquellas que se detectaran con ambos instrumentos. Estos cilindros de aluminio pesaban aproximadamente 1.5 toneladas cada uno y alrededor de ellos se hallaban una serie de cristales piezoeléctricos, los cuales generaban un voltaje cuando la barra oscilaba y estaban aisladas en el vacío. El principio de funcionamiento de los detectores de barra resonante es el siguiente: si una OG cuya frecuencia coincide con la frecuencia de resonancia del cilindro, se induce una fuerza a lo largo de la barra y ésta sería amplificada, detectando así una OG. Después de haber obtenido datos coincidentes entre las dos barras de aluminio Weber informó que había detectado una OG [7] lo que motivó a diversos grupos de investigación alrededor del mundo a replicar su detector el cual fue llamado de *masa resonante*[3] con el fin de obtener los mismos resultados. Sin embargo concluyeron que Weber había detectado sólo ruido. Este experimento fue de gran importancia pues con él se motivó a la comunidad científica a trabajar en la detección de OG. En la tabla 2.1 se muestran las características de los actuales detectores de masa resonante. No haremos mayor énfasis en este tipo de detector debido a que no es el tema central de la tesis.

Tabla 2.1: Detectores de OG de masa resonante

Detector	Antena	Transductor	Sensibilidad
CERN/Roma	Aluminio - 2.3 toneladas	Capacitivo	$7x10^{-19}$
CERN	Aluminio - 2.3 toneladas	Capacitivo	$2x10^{-18}$
LSU (EU)	Aluminio - 1.1 toneladas	Inductivo	$7x10^{-19}$
Stanford (EU)	Aluminio - 4.8 toneladas	Inductivo	10^{-18}
UWA (Australia)	Niobio - 1.5 toneladas	Cavidad RF	$9x10^{-19}$

2.3.2. Detectores por interferometría láser

Los detectores de OG's por interferometría láser, los cuales basan su funcionamiento en la configuración del interferómetro de Michelson [], son la mejor alternativa para la detección de OG's ya que ofrece la posibilidad de tener una alta sensibilidad sobre un amplio rango de frecuencias. El interferómetro de Michelson (cuya configuración veremos en el siguiente capítulo) está particularmente bien adaptado a la detección de OG, ya que ofrece un esquema que permite la medición del cambio en la distancia entre partículas que se encuentran libres, cuando estas son perturbadas por la incidencia de una OG, mediante un cambio de fase en el haz del láser del interferómetro,

el cual a su vez, es detectado como un cambio en el patrón de interferencia en la salida del mismo. En el siguiente capítulo explicaremos con más detalle este tipo de detectores.

Tabla 2.2: Detectores de OG por interferometría láser

Detector	Longitud	Tipo
TAMA (Japon)	300m	Fabry-Perot
LIGO (EU)	4km x 2	Fabry-Perot
GEO (Alemania)	600m	Dual Recycling
Virgo (Italia y Francia)	3km	Fabry-Perot

2.4. Detectores de Ondas Gravitacionales por Interferometría láser

Los detectores de OG por interferometría láser son los que actualmente cuentan con mayor apoyo a nivel mundial para su desarrollo e investigación, debido a que el interferómetro de Michelson tiene una amplia banda de observación y una potencial sensibilidad muy alta [8, 9] si la longitud efectiva de sus brazos es de unos pocos kilómetros.

En este capítulo explicaremos el esquema de un interferómetro cuando es usado como detector de OG's.

2.4.1. Interferómetro de Michelson

Como mencionamos anteriormente el principio de un detector de OGs por interferometría láser es un interferómetro de Michelson [1], cuya configuración se muestra en la Figura (2.3), donde se puede observar que está compuesto por una fuente láser, un divisor de haz, dos espejos y un detector en la salida.

El principio de funcionamiento del interferómetro es el siguiente: al pasar por el divisor, el haz del láser se divide en dos direcciones ortogonales x y y estos dos haces son reflejados en los espejos y recombinados al pasar nuevamente por el divisor de haz, produciendo así el fenómeno de interferencia en la salida del interferómetro.

Cuando el interferómetro es empleado como un detector de OG, los espejos están suspendidos en péndulos de forma que puedan comportarse como masas libres en la

dirección a lo largo del haz del láser a la frecuencia de observación.

En un detector por interferometría láser, cuando incide una OG, la longitud de sus brazos (distancia entre un espejo y el divisor de haz) es perturbada, generando cambios en la longitud de camino óptico de cada brazo, produciendo así, un diferencia en el cambio en cada brazo. Estos cambios de fase son detectados en la salida como desplazamientos en las franjas de interferencia y son proporcionales a la longitud de los brazos del interferómetro, cuando el período de la OG es lo suficientemente largo comparado con el tiempo de almacenamiento del haz del láser en el brazo.

Sin embargo, cuando la OG incidente en el interferómetro tiene un período corto, se produce la cancelación de los cambios de fase, por lo cual es importante saber que el cambio de fase en la salida producido por una OG de período corto, no se incrementa con la longitud efectiva de los brazos. Debido a esto, hay una longitud efectiva óptima para los brazos del interferómetro, la cual está en función de la frecuencia de operación del detector, o lo que es igual hay una longitud de los brazos óptima para el detector la cual depende de la frecuencia de la OG que se quiere detectar. Por ejemplo, la longitud efectiva para detectar OG's de 1Khz sería de aproximadamente 75 Km (ésta dependencia la explicaremos con mas detalle en las siguientes secciones), la cual en la la práctica es bastante difícil de construir, razón por la cual se han creado nuevas técnicas para obtener estas longitudes, siendo la más utilizada en los detectores de OG's, la cavidad Fabry-Perot la cual también explicaremos con mayor claridad posteriormente.

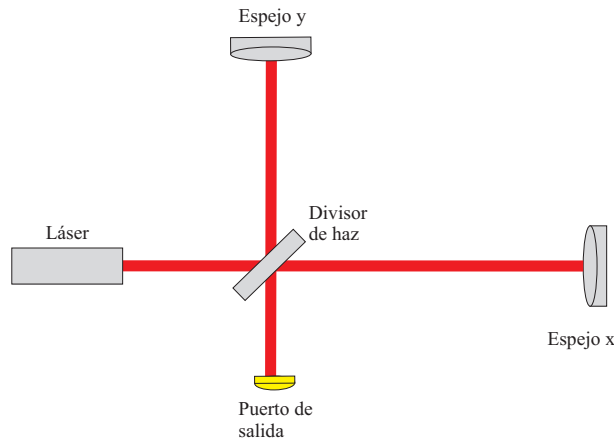


Figura 2.3: Detector de Ondas Gravitacionales por interferometría láser

Para analizar la detección de fase que se realiza en un detector de OGs por interferometría láser, observemos la Figura 2.3 donde se muestra el interferómetro Michelson

utilizado para este fin. Cuando incide una OG, ésta causa un cambio de fase diferencial en los dos caminos ópticos ortogonales del interferómetro, el cual es detectado como un cambio en el patrón de interferencia.

Para el análisis tenemos que el haz del láser de la fuente está dado por

$$E_1 = E_0 e^{i\Omega_l t}, \quad (2.19)$$

donde E_0 y Ω_l son las amplitudes del haz del láser y la frecuencia angular respectivamente.

Cuando los haces reflejados en los espejos de los brazos del interferómetro son re-combinados en el divisor de haz, experimentan cambios de fase dados por ϕ_x y ϕ_y y cambios de amplitud dados por los coeficientes de reflexión de los espejos, r_x y r_y , los cuales en la salida se pueden ver como

$$E_{sal} = r_x E_0 e^{i(\Omega_l t - \phi_x)} - r_y E_0 e^{i(\Omega_l t - \phi_y)}, \quad (2.20)$$

Por lo tanto, la intensidad del campo de salida en el detector está dada por[20]

$$I_D = |E_{sal}|^2 = \frac{I_{max} + I_{min}}{2} - \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \cos \phi_-, \quad (2.21)$$

donde ϕ_- es la diferencia de fases

$$\phi_- = \phi_x - \phi_y, \quad (2.22)$$

y I_{max} e I_{min} representan la intensidad máxima y mínima de una franja de interferencia, es decir, una franja clara y una franja oscura respectivamente.

De la ecuación (2.21) se puede observar que el interferómetro de Michelson detecta la diferencia de fase entre los haces de los dos brazos, a partir de la intensidad del campo en la salida del mismo.

Por otra parte, la eficiencia de interferencia es representada por el contraste C definido por

$$C \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (2.23)$$

En el caso ideal, cuando $r_x = r_y$ y el interferómetro está perfectamente alineado I_{min} se hace cero y el contraste C se hace uno, y, cuando $\phi_- = 0$ el haz del láser de ambos brazos interfieren destructivamente y la franja de interferencia se hace completamente oscura. Además cuando no hay pérdidas de potencia en el interferómetro, la intensidad en el detector esta dada por[20]

$$I_D = \frac{1}{2} I_l (1 - \cos \phi_-), \quad (2.24)$$

donde I_l es la intensidad del haz del laser de la fuente $I_l = |E_l^2|$.

2.4.2. Interferómetro de Michelson como detector de ondas gravitacionales

Consideraremos para nuestro análisis un cambio de fase causado por una OG con polarización + que se propaga a lo largo de la dirección z e incide sobre el interferómetro.

Inicialmente tenemos que la distancia de un fotón propagándose a lo largo del eje x satisface la ecuación

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \{1 + h_+(t)\} dx^2 = 0, \quad (2.25)$$

y con la aproximación de $h_+(t) \ll 1$ tenemos

$$\left\{1 - \frac{1}{2}h_+(t)\right\}c dt = dx. \quad (2.26)$$

Integrando ambos lados de esta ecuación, tenemos la ecuación para el tiempo de recorrido de vuelta completa de un fotón entre el divisor de haz y el espejo, el cual será denominado Δt_x :

$$\Delta t_x = \frac{2\xi^x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2\xi^x}{c}}^t h_+(t') dt', \quad (2.27)$$

donde ξ^x es la distancia entre el divisor de haz y el espejo.

Por lo tanto, el cambio de fase de vuelta completa en un fotón viajando a lo largo de la dirección x está dado por

$$\begin{aligned} \phi_x &= \Omega_l \Delta t_x, \\ \phi_x &= \frac{2\xi^x \Omega_l}{c} + \frac{\Omega_l}{2} \int_{t-\frac{2\xi^x}{c}}^t h_+(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por otra parte, la OG incidente causa un cambio de fase con el signo opuesto para el fotón que viaja a lo largo de la dirección y , por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_y &= \Omega_l \Delta t_y, \\ \phi_y &= \frac{2\xi^y \Omega_l}{c} - \frac{\Omega_l}{2} \int_{t-\frac{2\xi^y}{c}}^t h_+(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Finalmente, para hallar la diferencia de fase causada por la OG lo hacemos a partir de las ecuaciones 2.28 y 2.29, asumiendo que las longitudes de los brazos

del interferómetro de Michelson son iguales, es decir, $l = \xi^x = \xi^y$, de modo que la diferencia de fase total está dada por

$$\begin{aligned}\delta\phi_{OG} &= \frac{2\xi^x\Omega_l}{c} + \frac{\Omega_l}{2} \int_{t-\frac{2\xi^x}{c}}^t h_+(t') dt' \\ &\quad - \frac{2\xi^y\Omega_l}{c} - \frac{\Omega_l}{2} \int_{t-\frac{2\xi^y}{c}}^t h_+(t') dt' \\ \delta\phi_{OG} &= \Omega_l \int_{t-\frac{2l}{c}}^t h_+(t') dt',\end{aligned}\tag{2.30}$$

Esta diferencia de fase es detectada en la salida del interferómetro de Michelson como un cambio en las franjas de interferencia.

Cuando los cambios en la OG incidente son mucho menores que el tiempo de almacenamiento de vuelta completa en el brazo del interferómetro, el cual es

$$\tau = \frac{2l}{c},\tag{2.31}$$

la ecuación (3.12) se escribe de la forma

$$\delta\phi_{OG} \simeq \frac{2l\Omega_l}{c} h_+ = \frac{4\pi l}{\lambda_l} h_+,\tag{2.32}$$

donde λ_l es la longitud de onda del haz del láser.

2.4.3. Respuesta en frecuencia

Aunque la sensibilidad del interferómetro de Michelson se incrementa con una longitud larga en los brazos para OG's de bajas frecuencias, ésta no se incrementa para OG's de alta frecuencia debido a la cancelación de los cambios de fase. Por lo tanto, el interferómetro de Michelson tiene una longitud óptima de sus brazos correspondiente a la frecuencia de la OG de operación.

Tomando la transformada de Fourier de $h_+(t)$

$$h_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega,\tag{2.33}$$

y sustituyendo esta transformada en la ecuación (2.30), tenemos

$$\begin{aligned}\delta\phi_{GR} &= \Omega_l \int_{t-\frac{2l}{c}}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} h_+(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{MI}(\omega) h_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega,\end{aligned}\tag{2.34}$$

donde H_{MI} está dada por

$$H_{MI}(\omega) = \frac{2\Omega_1}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) e^{i\frac{l\omega}{c}}. \quad (2.35)$$

Esta última expresión representa la sensibilidad del interferómetro de Michelson para una OG con frecuencia angular ω .

Tomando como aproximación que el período de una OG ($2\pi/\omega$) es mucho mayor que el tiempo de almacenamiento en el brazo del interferómetro de Michelson τ , el valor absoluto de la respuesta estará dado por

$$|H_{MI}| \sim \left(\frac{2\Omega_1 l}{c}\right), \quad (2.36)$$

donde se puede observar que el cambio de fase causado por una OG es proporcional a la longitud de los brazos l . Esto ocurre debido a el efecto de OG's acumuladas durante el tiempo de almacenamiento de los fotones en los brazos del interferómetro de Michelson. Pero por otra parte, la sensibilidad para OGs de alta frecuencia no se incrementa con la longitud de los brazos debido a que los efectos de éstas están integrados y cancelados.

De la ecuación (3.18) se puede observar que la sensibilidad del interferómetro de Michelson es máxima cuando la longitud de los brazos l satisface la siguiente condición

$$\frac{l\omega_{obs}}{c} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.37)$$

para una frecuencia angular ω de una OG dada. Esta ecuación muestra que el tiempo de almacenamiento óptimo en el brazo del interferómetro de Michelson es la mitad del período de la OG para la cual es calibrado. Es decir, la longitud de camino óptico es optimizada cuando es la mitad de la longitud de onda de la OG definida.

Tomando como ejemplo una OG con una frecuencia de 1 kHz, la longitud de los brazos óptima para el interferómetro sería cerca de 75 km, siendo ésta una longitud que no es posible construir para un detector con base en la tierra debido a varios problemas: el alto costo de construcción de largos tubos de vacío y la imposibilidad de encontrar un amplio lugar dentro del relieve del planeta con esta longitud. Por lo tanto, como medida para optimizar la respuesta en frecuencia del interferómetro de Michelson con una longitud de los brazos de unos pocos kilómetros, se han propuesto técnicas mediante el incremento del tiempo de almacenamiento de la señal, es decir, ampliando la longitud efectiva de los brazos, estas son: Delay Line y Fabry-Perot.

La técnica Delay Line propone extender la longitud efectiva de los brazos del interferómetro mediante el despliegue del camino óptico por multiples reflexiones. En un interferómetro Michelson-Delay Line, cuya configuración se muestra en la Figura 2.4, la longitud de camino óptico total L_{DL} esta dada por $L_{DL} = N_{DL}l_{DL}$, donde N_{DL} es el número del camino óptico ($N_{DL} - 1$ reflexiones) y l_{DL} es la distancia entre los dos espejos que forman el Delay Line. Para un mejor entendimiento, se puede decir que un simple interferómetro de Michelson es interpretado como un Delay Line con un numero de rebotes de $N_{DL} = 2$.

La respuesta en frecuencia de un interferómetro Michelson- Delay Line H_{MIDL} se obtiene reemplazando $2l$ de H_{MI} en la ecuación (2.34) por L_{DL} , obteniendo

$$H_{MIDL}(\omega) = \frac{2\Omega_1}{\omega} \sin\left(\frac{L_{DL}\omega}{2c}\right) e^{-i\frac{L_{DL}\omega}{2c}}. \quad (2.38)$$

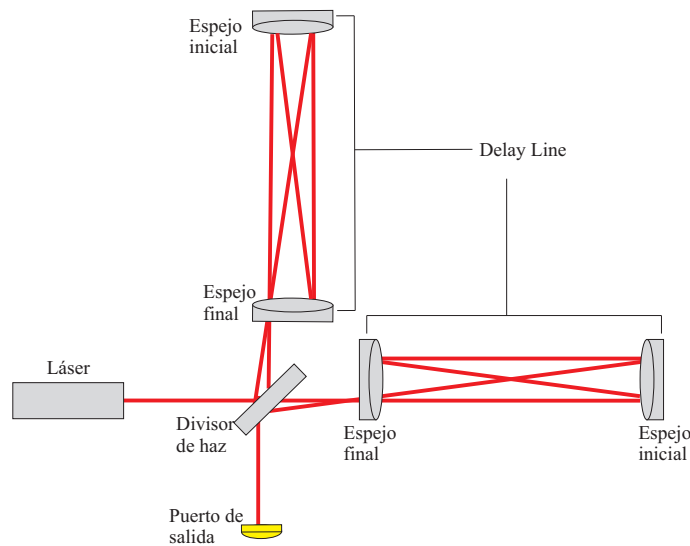


Figura 2.4: Interferómetro de Michelson con la técnica Delay Line en sus brazos. En este caso el haz del láser realiza cuatro rebotes entre los espejos, por lo tanto $N_{DL} = 4$

Por otra parte, la técnica Fabry-Perot extiende la longitud efectiva de los brazos del interferómetro mediante la interferencia múltiple en una cavidad Fabry-Perot, la cual explicaremos con mas detalle en el siguiente capítulo. En un interferómetro Michelson-Fabry-Perot, cuya configuración se muestra en la Figura 2.5, los espejos de los brazos del interferómetro son reemplazados por cavidades Fabry-Perot.

La respuesta en frecuencia de esta configuración está dada por

$$H_{MIFP}(\omega) = \frac{2a_{cav}\Omega_1}{\omega} \frac{\sin(\frac{L\omega}{c})}{1 - r_i r_f e^{-2i\frac{L\omega}{c}}} e^{i\frac{L\omega}{c}}, \quad (2.39)$$

donde

$$a_{cav} = \frac{t_i^2 r_f}{1 - r_i r_f}, \quad (2.40)$$

r_i y r_f son las amplitudes de reflectividad de los espejos inicial y final respectivamente, t_i es la transmitividad del espejo inicial, y L es la longitud de la cavidad Fabry-Perot.

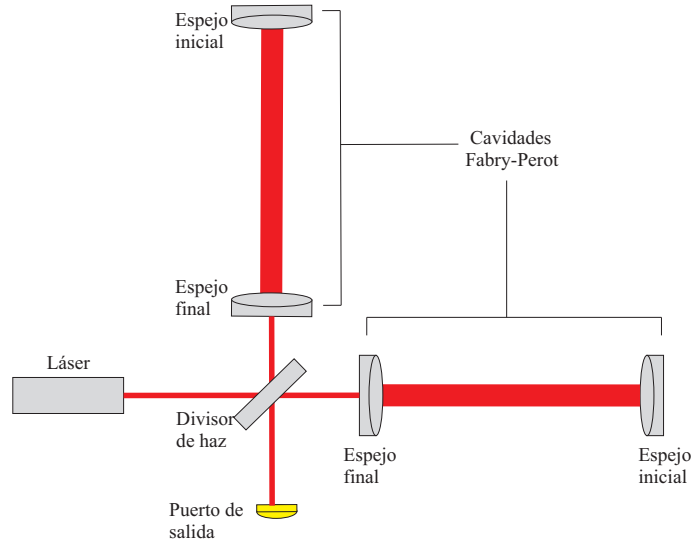


Figura 2.5: Interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot en sus brazos

Aunque ambos tipos de esquemas presentan ventajas y desventajas, la técnica Fabry-Perot es la que se ha adoptado en la mayoría de los detectores reales de OGs, como LIGO y VIRGO, debido a que el Delay Line requiere grandes espejos, además porque uno de los principales problemas de esta técnica es el ruido de la luz dispersada [29].

Debido a que nuestro proyecto se basa en la implementación de cavidades Fabry-Perot dentro del prototipo simulador de detección de OG's, explicaremos con mas detalle esta técnica en el siguiente capítulo.

2.4.4. Fuentes de ruido en un interferómetro

La sensibilidad de un detector de OG's por interferometría láser puede ser fácilmente afectada por varias fuentes, siendo los más fundamentales para los detectores con base en tierra los ruidos de disparo, térmicos y ruido sísmico.

Ruido de lectura óptica

La sensibilidad del interferómetro está limitada por el ruido de lectura óptica, el cual está dado por el ruido de disparo y el ruido de presión de radiación[31].

Ruido de disparo.

Es uno de los ruidos fundamentales que limita la sensibilidad de un interferómetro. Sabemos que el interferómetro de Michelson convierte los cambios de fase diferencial en sus brazos en movimiento de las franjas de interferencia. Un fotodetector ubicado en la salida cuenta el número de fotones en estas franjas en un tiempo determinado y produce una fotocorriente proporcional a la intensidad incidente. En este proceso, el número de fotones contados tienen alguna distribución de probabilidad dada por la distribución de Poisson¹, la cual resulta en un error de conteo de fotones llamado ruido de disparo.

El ruido de disparo está dado por

$$\delta h_{disp} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda_1}{4\pi\eta P_1}} \quad [1/\sqrt{Hz}], \quad (2.41)$$

donde η es la eficiencia cuántica del fotodiodo y \hbar es la constante de Planck reducida². Como se puede observar el ruido de disparo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la potencia del láser. Por lo tanto, un láser de alta potencia es necesario para reducir el nivel de ruido de disparo.

Ruido de presión de radiación.

Además del ruido de disparo, la naturaleza cuántica de la luz causa en el interferómetro el ruido de presión de radiación. La posición del espejo es perturbada por la presión de radiación del haz del láser reflejado con el espejo. Por lo tanto, la fluctuación del número de fotones causa un ruido de desplazamiento en el espejo, el cual es llamado ruido de presión de radiación, y está descrito por [30]

$$\delta h_{rad} = \frac{1}{Mf^2l} \sqrt{\frac{\hbar P_1}{\pi^3 c \lambda_1}} \quad [1/\sqrt{Hz}], \quad (2.42)$$

¹La distribución de Poisson está dada por $p(N) = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!}$, donde \bar{N} es el número de fotones en un intervalo de conteo.

²Constante de Planck reducida: $\hbar = 1,055 \times 10^{-34} [J.s]$.

donde M es la masa del espejo.

Aunque el nivel de ruido de disparo es reducido con una alta potencia del láser, el ruido de presión de radiación se incrementa proporcionalmente con la raíz cuadrada de la potencia incidente. Por lo tanto, mientras que el ruido de disparo es un ruido blanco, el ruido de presión de radiación es proporcional a f^{-2} .

Debido a lo anterior, la potencia del láser debe ser optimizada a una cierta frecuencia para reducir al mínimo la suma de cuadratura de estos dos ruidos llamado el ruido de lectura óptica.

Ruido térmico

El ruido térmico es otra de las fuentes ruido fundamentales para un detector de OG's. En un interferómetro el ruido de desplazamiento es causado por el movimiento interno del espejo y el movimiento pendular del sistema de suspensión.

Ruido de desplazamiento debido a la disipación.

La ecuación de movimiento en un material con una disipación interna (modelo de amortiguamiento) esta dada por

$$m[-\omega^2 + \omega_0^2\{1 + i\phi_k(\omega)\}]x(\omega) = f_T(\omega), \quad (2.43)$$

donde $\phi_k(\omega)$ es una constante elástica compleja, f_T es la fuerza de fluctuación debida a la disipación, ω_0 es la frecuencia resonante y m es la masa efectiva del sistema.

El valor Q en la resonancia está dado por la constante elástica compleja mediante

$$Q = \frac{1}{\phi_k(\omega_0)}, \quad (2.44)$$

se cree, gracias a los resultados de diversas medidas [17, 18] que la constante elástica compleja tiene una pequeña dependencia con la frecuencia.

Con el fin de reducir el nivel de ruido térmico, se debe incrementar el valor de Q mediante materiales de bajas pérdidas y mecanismos de suspensión, o también reduciendo la temperatura mediante la reducción de la temperatura de refrigeración del sistema [19].

Ruido térmico del péndulo.

La frecuencia de resonancia del péndulo del sistema de suspensión ($\omega_{pen}/2\pi \sim 1Hz$) es normalmente mucho menor que la banda de observación (algunos pocos cientos de Hertz). En este caso ($\omega \gg \omega_{pen}$), el nivel de ruido térmico debido al sistema de

suspensión está dado por

$$\delta x(\omega) \simeq \sqrt{\frac{4k_B T \omega_{pen}^2}{MQ\omega^5}} [m/\sqrt{Hz}], \quad (2.45)$$

el cual es proporcional a $f^{-\frac{5}{2}}$.

Ruido térmico del espejo.

La frecuencia de resonancia del modo interno de la masa de prueba ($\omega_{int} \sim 10kHz$) es normalmente mucho mayor que la banda de observación. En este caso ($\omega \ll \omega_{int}$), y el nivel de ruido térmico del sistema de suspensión está dado por

$$\delta x(\omega) \simeq \sqrt{\frac{4k_B T}{m_{eff} Q \omega_{int}^2 \omega}} [m/\sqrt{Hz}], \quad (2.46)$$

donde m_{eff} es la masa efectiva del modo interno, la masa efectiva del modo mas bajo es la mitad de la masa del espejo. El nivel de ruido térmico del modo interno de la masa de prueba debe ser estimado teniendo en cuenta las contribuciones de todos los modos internos. El nivel de ruido térmico del movimiento interno de masas es proporcional a $f^{-\frac{1}{2}}$.

Ruido sísmico

El movimiento de la tierra, llamado ruido sísmico, es uno de las fuentes de ruido mas críticos para un interferómetro con base en la tierra, el movimiento de la tierra excita el movimiento de los componentes ópticos de un interferómetro, resultando un ruido de desplazamiento. Además, un gran movimiento del suelo en la región de baja frecuencia puede hacer que el interferómetro sea inestable.

Ruido sísmico y sistema de suspension.

A pesar que la amplitud del movimiento del suelo depende de la ubicación del interferómetro, ya sea el país o la ciudad, la densidad del espectro de potencia es aproximadamente proporcional a f^{-2} y está dada por

$$\delta x_{sis}(f) \sim 10^{-8} \times \left(\frac{1}{f}\right)^2 [m/\sqrt{Hz}], \quad (2.47)$$

en una región de frecuencias sobre 0.1 Hz. El factor 10^{-8} corresponde al área de la ciudad de ubicación del interferómetro y varía entre 10^{-7} y 10^{-9} aproximadamente.

Ruidos del láser

El láser de un interferómetro no es ideal, tiene un ruido de frecuencia, ruido de intensidad, entre otros. Estos ruidos afectan la sensibilidad con asimetrías alrededor

del punto de operación del láser.

Ruido de frecuencia del láser.

Si los dos brazos del interferómetro son completamente simétricos, el ruido de frecuencia del láser es rechazado por la interferencia, lo cual es llamado *relación de rechazo de ruido de modo común* (CMRR).

En un interferómetro Michelson-Fabry-Perot el CMRR está dado por

$$CMRR \sim \frac{L_-}{L} + \frac{F_-}{F}. \quad (2.48)$$

Se puede observar que el CMRR, esta limitado por la diferencia de longitud de los brazos y la finesa de la cavidad (F), es decir, por la diferencia de longitud de camino óptico total.

Ruido de la intensidad del láser.

Un interferómetro de Michelson convierte una información de fase del haz del láser en un cambio de intensidad en el detector. Por lo tanto, es necesario excluir el efecto de la fluctuación de intensidad en el puerto de señal. Al establecer el punto de operación a una franja oscura, el efecto del ruido de intensidad es reducido.

Sin embargo, en la práctica, sigue existiendo una fluctuación alrededor de la franja oscura debida a la ganancia del sistema de control. El movimiento residual alrededor de la franja oscura se acopla con el ruido de intensidad del láser por medio de

$$\delta x_{int} = \frac{\delta P}{P} \delta x_{rms} \quad [m/\sqrt{Hz}], \quad (2.49)$$

donde δx_{rms} es la fluctuación RMS³ residual alrededor de la franja oscura.

Por lo tanto, la ganancia del sistema de control debe ser lo suficientemente grande para eliminar la desviación residual RMS, así como la estabilización de la intensidad del láser.

³root mean square

Capítulo 3

Cavidad Fabry-Perot

Como mencionamos anteriormente, en los detectores de OG las cavidades Fabry-Perot son utilizadas para extender la longitud efectiva de los brazos del interferómetro, sin embargo estas también son usadas como una forma de cavidad de reciclaje y para estabilizar en frecuencia el detector.

Una característica importante en las cavidades Fabry-Perot de los detectores de OG es que éstas son de longitudes muy largas y tienen espejos que pueden moverse, con lo cual se diferencian de las cavidades rígidas comúnmente usadas en la física láser. También debemos tener en cuenta que los campos en las cavidades Fabry-Perot de los detectores de OG son dinámicos y su dependencia con el tiempo es importante para la detección de las OG.

En este capítulo presentaremos el análisis detallado de una cavidad Fabry-Perot dentro de un detector de OG.

3.1. Características y planos de referencia de una cavidad Fabry-Perot

Una cavidad Fabry-Perot ideal está compuesta, como se muestra en la Figura 3.1, por dos espejos planos, llamados espejo inicial (espejo a) el cual llamaremos E_a y espejo final (espejo b) al que llamaremos E_b , separados por una distancia L [?].

Para cada espejo, describiendo la relación entre el campo eléctrico reflejado o transmitido y el campo eléctrico incidente, tenemos entonces que la *reflectividad* está dada por r_a y r_b y la *transmisividad* por t_a y t_b respectivamente.

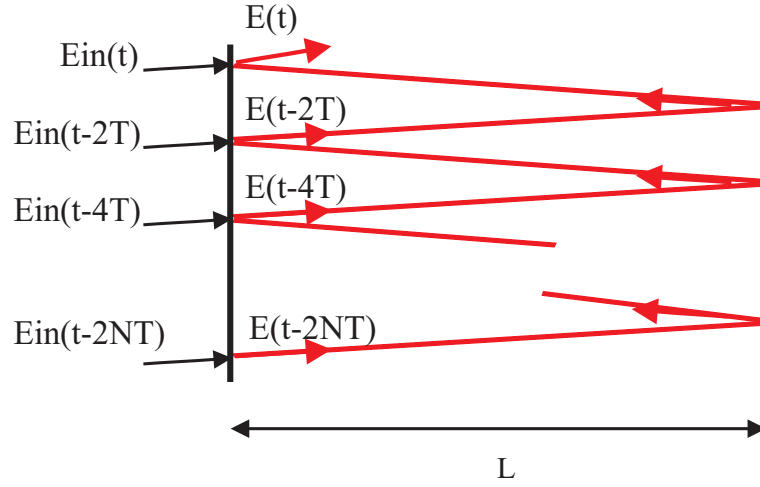


Figura 3.1: Diagrama esquemático de una cavidad Fabry-Perot

Tenemos que la ley de conservación de la energía requiere que

$$r_{a,b}^2 + t_{a,b}^2 = 1, \quad (3.1)$$

cuando se ignoran las pérdidas.

Sin embargo, cuando se tienen en cuenta las pérdidas en los espejos, la ecuación (3.1) queda

$$r_{a,b}^2 + t_{a,b}^2 = 1 - L_{a,b}, \quad (3.2)$$

donde $L_{a,b}$ son los coeficientes de pérdidas de los espejos a y b debidos a la absorción y la dispersion de la luz.

Definiremos el campo del láser (onda electromagnética) por medio de la componente transversal del campo eléctrico $E(\vec{r}, t)$. Asumiremos que la onda electromagnética es una onda monocromática plana con longitud de onda λ y frecuencia dada por

$$\nu = c/\lambda, \quad (3.3)$$

donde c es la velocidad de la luz. La frecuencia angular y el número de onda están definidos por

$$\omega = 2\pi\nu, \quad (3.4)$$

$$k = \omega/c. \quad (3.5)$$

Para nuestro análisis consideraremos la propagación del láser en la dirección positiva del eje x

$$E(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}, \quad (3.6)$$

y asumiremos que un espejo es ubicado en esta dirección, con lo que, si la coordenada del espejo es x_0 , el campo reflejado por el espejo está dado por

$$E_{ref} = e^{i(\omega t + kx)} e^{-2kx_0}. \quad (3.7)$$

3.2. Ecuaciones de campo

Longitud de la cavidad

Los espejos de una cavidad Fabry-Perot de un detector de OG están separados una distancia L . En esta distancia se tiene un retardo entre las reflexiones de la luz en los espejos, dado por

$$T = \frac{L}{c}, \quad (3.8)$$

donde c es la velocidad de la luz. Teniendo en cuenta que el haz del láser entra en la cavidad desde el extremo izquierdo de la misma, denotaremos el espejo frontal por e_a (*espejo a*) y el espejo final por e_b (*espejo b*) con respecto al láser, como se muestra en la Figura 3.2. Debido a que dentro de un detector de OG, los espejos se

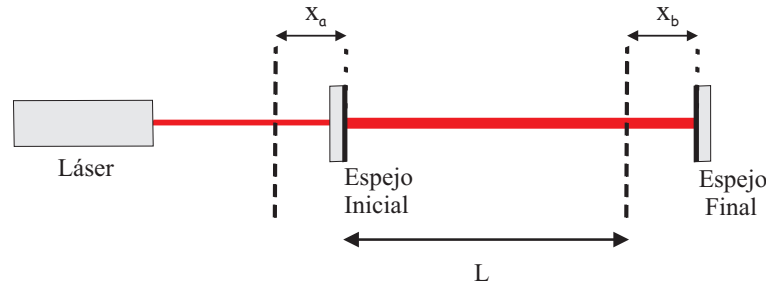


Figura 3.2: Posición de los espejos y planos de referencia

mueven un valor extremadamente pequeño (del orden de $1\mu m$) y están separados por una distancia muy grande (del orden de $1km$), el análisis de la cavidad se debe hacer introduciendo dos sistemas de coordenadas, una para cada espejo.

La posición de los espejos está dada por las coordenadas (x_a y x_b) como se muestra

en la Figura 4.2. Cuando los espejos se mueven, la longitud de la cavidad cambia, y en cualquier instante de tiempo está dada por

$$L + x_b(t) - x_a(t). \quad (3.9)$$

Sin embargo, esta definición de la longitud de la cavidad no es muy empleada, debido a que los dos espejos de la cavidad no están conectados entre si, por lo que la distancia instantánea dada por la ecuación (3.9) no puede ser observada. La distancia que se podrá observar está dada por la propagación de la luz, mediante

$$d(t) = L + x_b(t - T) - x_a(t), \quad (3.10)$$

$$d(t) = L + x_b(t) - x_a(t - T). \quad (3.11)$$

Estas ecuaciones indican las longitudes físicas de la cavidad.

Campos internos

Tal como se muestra en la figura 3.3 hay dos ondas incidiendo en una cavidad Fabry-Perot: una está moviéndose en la dirección de la onda incidente y la otra se mueve en la dirección opuesta. Los planos de referencia para las amplitudes de estas ondas se pueden elegir en cualquier lugar dentro de la cavidad, sin embargo, es conveniente elegirlos tan cerca de los espejos como sea posible. Entonces, los orígenes de las coordenadas para cada espejo, se pueden unir a los planos de referencia mencionados en la sección anterior.

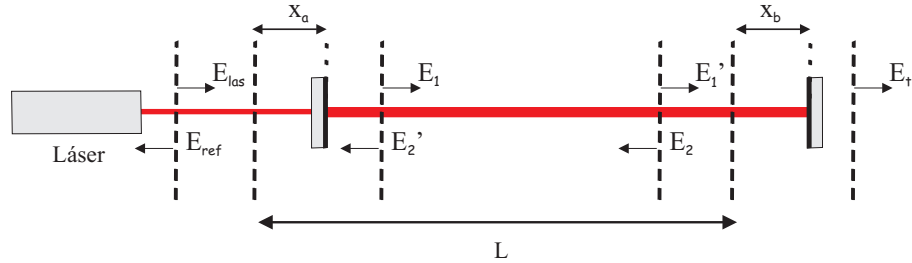


Figura 3.3: Campos en una cavidad Fabry-Perot

Por lo tanto, la propagación de los campos incidiendo en la cavidad de un plano de referencia al otro está dada por

$$E_1'(t) = E_1(t - T)e^{-ikL}, \quad (3.12)$$

$$E_2'(t) = E_2(t - T)e^{-ikL}. \quad (3.13)$$

Los campos reflejados en los espejos de las cavidades están dados por

$$E_2(t) = -r_b E_1'(t) e^{-2ikx_b(t)}, \quad (3.14)$$

$$E_1(t) = -r_a E_2'(t) e^{2ikx_a(t)} + t_a E_{in}(t). \quad (3.15)$$

Las ecuaciones de la (3.12) a la (3.15) describen la evolución de los campos en la cavidad Fabry-Perot para movimientos arbitrarios de los espejos. Hay por lo tanto, cuatro ecuaciones para cuatro campos internos en la cavidad.

Sin embargo, es conveniente reducir estas cuatro ecuaciones a una sola ecuación para cada uno de los campos. Por ejemplo para hallar E_1 , en la Figura 3.3, el cual describe el campo propagándose a través de la cavidad desde el espejo a hasta el espejo b , retomamos la ecuación (3.15) y tenemos que

$$E_1(t) = -r_a E_2(t) e^{2ikx_a(t)} + t_a E_{in}(t).$$

Tomamos las ecuaciones (3.12), (3.13), (3.14) llegamos a la expresión para el campo en la cavidad E_1

$$E_1(t) = r_a r_b E_1(t - 2T) e^{-2ikd(t)} + t_a E_{in}(t). \quad (3.16)$$

Es conveniente ahora, separar las partes constante y variables de la longitud de la cavidad, por lo tanto de la ecuación (4.10) tenemos que

$$d(t) = L + \xi(t), \quad (3.17)$$

donde la parte variable está definida por

$$\xi(t) = x_b(t - T) - x_a(t), \quad (3.18)$$

y afecta la evolución de los campos en la cavidad en el dominio del tiempo. La parte constante (L) afecta la interferencia de multiples haces de los campos en la cavidad.

Si

$$\phi = kL, \quad (3.19)$$

tenemos que, la ecuación para el campo propagándose en la cavidad queda dada por

$$E(t) = t_a E_{in}(t) + r_a r_b e^{-2i\phi} e^{-2ik\xi(t)} E(t - 2T). \quad (3.20)$$

Es importante tener en cuenta que al entrar en la cavidad, la luz se refleja primero en el espejo final y después en el espejo frontal.

Campos externos

Adicionales a las ondas internas, hay dos ondas externas generadas por una cavidad Fabry-Perot, una es la onda reflejada y la otra es la onda transmitida, tal como se muestra en la Figura 3.4

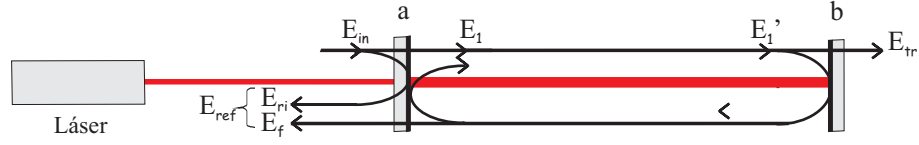


Figura 3.4: Formación de los campos transmitidos y reflejados en una cavidad Fabry-Perot

Se puede observar que el campo reflejado es una superposición del campo reflejado y el campo interno transmitido a través del espejo frontal, y está dado por

$$E_{ref} = E_{ri} + E_f, \quad (3.21)$$

donde E_{ri} es el campo reflejado inmediatamente y E_f es el campo de fugas, y sus amplitudes están dadas por

$$E_{ri} = r_a E_{in}(t) e^{-2ikx_a(t)}, \quad (3.22)$$

$$E_f = t_a E_2'(t). \quad (3.23)$$

En la ecuación (3.23) se puede ver que el signo del campo reflejado inmediatamente es positivo debido a que la reflexión ocurre dentro del sustrato del espejo (Figura 3.3).

Para obtener el campo reflejado, hallamos primero la expresión para E_2' y después combinamos las ecuaciones (3.23) y (4.24). Partimos de la ecuación (3.13) y junto con (3.12) y (3.14) tenemos que E_2' queda dado por

$$E_2'(t) = -r_b E_1(t - 2T) e^{-2ikL} e^{-2ikx_b(t-T)}, \quad (3.24)$$

donde E_1 está dado por la ecuación (4.16).

Por lo tanto, hallamos E_{ref} a partir de la ecuación (4.21), sustituyendo las ecuaciones (3.22), (3.23) y (3.24) y llegamos a la expresión para el campo reflejado

$$E_{ref}(t) = e^{-2ikx_a(t)} [r_a E_{in}(t) - t_a r_b E_1(t - 2T) e^{-2ik[L+\xi(t)]}]. \quad (3.25)$$

Finalmente, tomamos de la ecuación (3.17) la expresión para $E(t - 2T)$ y desarrollamos matemáticamente la expresión anterior, para llegar a a que el campo reflejado queda de la forma

$$E_{ref}(t) = e^{-2ikx_a(t)} \left[\frac{(r_a^2 + t_a^2) E_{in}(t) - t_a E(t)}{r_a} \right]. \quad (3.26)$$

Por otra parte, el campo transmitido se define después del espejo final y está dado por

$$E_{tr}(t) = t_b E_1'(t), \quad (3.27)$$

donde $E_1'(t)$ esta dado por la ecuación (3.12) entonces

$$E_{tr}(t) = t_b E_1(t - T) e^{-ikL}. \quad (3.28)$$

Siendo este campo transmitido proporcional al campo interno.

Suma de campos sobre vueltas completas

Como presentamos anteriormente la dinámica de los campos en una cavidad está descrita por la ecuación

$$E(t) = t_a E_{in}(t) + r_a r_b e^{-2ikd(t)} E(t - 2T). \quad (3.29)$$

Iterando esta ecuación N veces, obtenemos la suma dada por

$$\begin{aligned} E(t) = & t_a \sum_{n=0}^{N-1} (r_a r_b)^n e^{-2ikS_n(t)} E_{in}(t - 2nT) \\ & + (r_a r_b)^N e^{-2ikS_N(t)} E_{in}(t - 2NT). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esta ecuación describe el campo en la cavidad en términos del campo de entrada que ingresa a la cavidad, en intervalos de tiempo iguales a la duración de una vuelta completa, y es llamada *suma sobre vueltas completas*.

Las sumas parciales dentro de la ecuación están definidas como

$$S_0(t) = 0, \quad (3.31)$$

$$S_1(t) = d(t), \quad (3.32)$$

$$S_2(t) = d(t) + d(t - 2T), \quad (3.33)$$

y así sucesivamente. La notación $2S_n$ es la longitud de camino óptico para un fotón el cual completa n vueltas completas en la cavidad con

$$S_n(t) = \sum_{p=0}^{n-1} d(t - 2pT). \quad (3.34)$$

Debido a que los valores del campo de entrada son siempre finitos, el último término de la suma en la ecuación (4.31) se hace pequeño para grandes valores de N , es decir

$$(r_a r_b)^N \ll 1 \quad \text{si} \quad N \gg N_{eff}, \quad (3.35)$$

donde N_{eff} está dado por

$$N_{eff} = \frac{1}{|\ln(r_a r_b)|}, \quad (3.36)$$

y es llamado el *número efectivo de vueltas completas de fotones* en una cavidad Fabry-Perot¹.

El número efectivo de vueltas completas se puede utilizar para introducir el límite superior N . Sabemos que el número de vueltas completas en la cavidad N se considera grande si $N \gg N_{eff}$. En el límite para un N grande, la ecuación (3.56) se convierte en

$$E(t) = t_a \sum_{n=0}^{\infty} (r_a r_b)^n e^{-2ikS_n(t)} E_{in}(t - 2nT). \quad (3.37)$$

Con frecuencia el campo del láser es constante, es decir $E_{in}(t) = A$. En este caso, la suma sobre vueltas completas está dada por

$$E(t) = t_a A \sum_{n=0}^{\infty} (r_a r_b)^n e^{-2ikS_n(t)}. \quad (3.38)$$

La representación para los campos de la cavidad como una suma de vueltas completas, descrita por la ecuación (4.39) se muestra en la Figura 3.4. Cada término en la suma corresponde a un grupo de fotones los cuales han realizado algún número de vueltas completas en la cavidad. El término n th corresponde a los fotones que han finalizado n vueltas completas y el término de orden cero corresponde a los fotones que acaban de ingresar en la cavidad. Las fases acumuladas por los fotones durante su propagación en la cavidad son proporcionales a las longitudes de camino óptico S_n .

3.3. Solución estática

Campo del láser constante

La solución simple de la ecuación (3.29) es la solución estática. Corresponde a la

¹Algunas veces es llamado el *número efectivo de rebotes* aunque es un nombre poco apropiado ya que el número de rebotes es el doble del número de vueltas completas

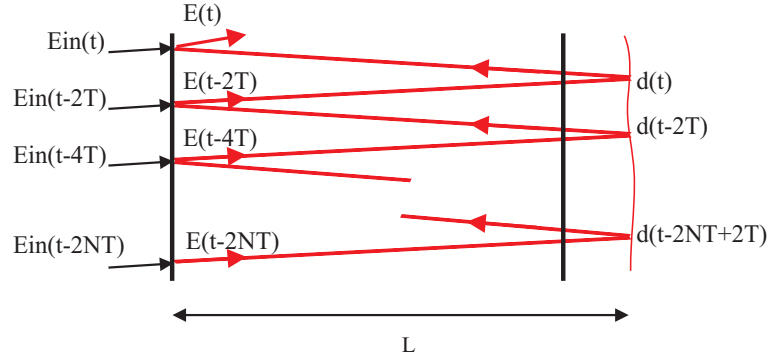


Figura 3.5: Recorridos de vuelta completa de los fotones en una cavidad Fabry-Perot

situación cuando los espejos de la cavidad están en reposo, es decir ($\xi = \text{constante}$), y la amplitud de campo del láser es constante, con lo cual

$$E_{in}(t) = A. \quad (3.39)$$

Asumiendo que L contiene un número entero de medias longitudes de onda ($L = n\pi/2$) y teniendo en cuenta éstas condiciones para ξ , L , E_{in} y la ecuación (3.18), reemplazamos en (3.29), tenemos entonces que el campo en la cavidad satisface

$$\begin{aligned} E &= t_a A + r_a r_b e^{-2ik[L+\xi]} E, \\ E &= \frac{t_a A}{1 - r_a r_b e^{-2ik\xi}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Tomando la fase ϕ dada por

$$\phi = k\xi, \quad (3.41)$$

tenemos entonces

$$E = \frac{t_a A}{1 - r_a r_b e^{-2i\phi}}. \quad (3.42)$$

Por ultimo, para hallar el campo reflejado, tomamos la ecuación (4.26) y reemplazamos la solución para el campo E en la cavidad dada por la ecuación (3.42) con lo que llegamos a

$$E_{ref} = e^{-2ikx_a(t)} A \left[r_a - \frac{t_a^2 r_b e^{-2i\phi}}{1 - r_a r_b e^{-2i\phi}} \right]. \quad (3.43)$$

Si tomamos

$$\rho(\phi) = r_a - \frac{t_a^2 r_b e^{-2i\phi}}{1 - r_a r_b e^{-2i\phi}}, \quad (3.44)$$

el campo reflejado queda de la forma

$$E_{ref} = e^{-2ikx_a(t)} A \rho(\phi). \quad (3.45)$$

Finalmente, la amplitud máxima del campo de la cavidad es

$$E = g A, \quad (3.46)$$

donde g es la ganancia de amplitud de la cavidad Fabry-Perot y está dada por

$$g = \frac{t_a}{1 - r_a r_b} \quad (3.47)$$

Potencia en una cavidad Fabry-Perot

La intensidad (potencia) del campo en una cavidad Fabry-Perot está definida como

$$P = |E|^2 \quad (3.48)$$

Para la solución estática, la potencia en la cavidad se convierte en una función de compensación de fase dada por

$$P = \left| \frac{t_a A}{1 - r_a r_b e^{-2i\phi}} \right|^2, \quad (3.49)$$

$$P = \frac{g^2 |A|^2}{1 + F \sin^2(\phi)}, \quad (3.50)$$

donde F es el coeficiente de Fineza y está dado por

$$F = \frac{4r_a r_b}{(1 - r_a r_b)^2}. \quad (3.51)$$

La ecuación (3.50) es conocida como la función de intensidad de Airy[32][33]. La función de Airy normalizada está dada por

$$A(\phi) = \frac{1}{1 + F \sin^2(\phi)}. \quad (3.52)$$

Condición de resonancia

De la ecuación (3.50) podemos observar que la potencia en una cavidad Fabry-Perot es proporcional a la función de Airy

$$P = g^2 P_{in} A(\phi), \quad (3.53)$$

donde P_{in} es la potencia del campo del láser y es igual a $P_{in} = |A|^2$. Por otra parte, tenemos que la función de Airy es función de una variable, la variación de fase, la cual está dada por

$$\phi = k\xi + \omega_s T. \quad (3.54)$$

Dentro de este contexto la resonancia en una cavidad Fabry-Perot ocurre cuando la compensación de fase es igual a múltiplos de π , por lo tanto, para cavidades en resonancia, la reflexividad de la misma está dada por una función real. Ahora, para una cavidad en resonancia, la reflectividad de ésta esta dada por la función

$$\rho(\phi) = \frac{r_a - (1 - L_a)r_b}{1 - r_a r_b}. \quad (3.55)$$

La resonancia para una frecuencia fija del láser ($\omega_s = 0$) ocurre cuando la compensación de longitud satisface la condición

$$\xi = n\frac{\lambda}{2}, \quad (3.56)$$

donde n es un entero.

De la misma forma, la resonancia ocurre para una longitud fija de la cavidad ($\xi = 0$) cuando la compensación de la frecuencia del láser satisface la condición

$$\omega_s = n\frac{\pi}{T}. \quad (3.57)$$

Otro parámetro importante en la resonancia de una cavidad Fabry-Perot es la separación entre las frecuencias de resonancia adyacentes, la cual se conoce como *rango espectral libre* (*FSR por sus siglas en inglés*) que está dada por

$$\omega_{fsr} = \frac{\pi}{T}. \quad (3.58)$$

Ahora, si tanto la longitud de la cavidad como la frecuencia del láser son compensadas, la condición de resonancia ocurre cuando

$$\frac{\omega_s}{\omega} = -\frac{\xi}{L}. \quad (3.59)$$

Sin embargo, en la práctica estos parámetros están constantemente variando en el tiempo. Para este caso, podemos asumir que la condición de resonancia estaría dada por

$$\frac{\omega_s(t)}{\omega} = -\frac{\xi(t)}{L}. \quad (3.60)$$

3.4. Solución dinámica

Cuando los espejos de una cavidad Fabry-Perot están en movimiento, la resonancia requiere una compensación de frecuencia variable $\omega_s(t)$. Este desplazamiento en frecuencia nos da lugar a una compensación de fase variable dada por

$$\psi(t) = \int_0^t \omega_s(t') dt' . \quad (3.61)$$

En este caso, el campo del láser está dado por

$$E_{in}(t) = Ae^{i\psi(t)} , \quad (3.62)$$

con estas condiciones el campo en la cavidad dado por la ecuación (3.16) está dado por

$$E(t) = t_a A e^{i\psi(t)} + r_a r_b e^{-2ik\xi(t)} E(t - 2T) . \quad (3.63)$$

y hallando la solución de esta ecuación, tenemos

$$E(t) = \frac{t_a A e^{i\psi(t)}}{1 - r_a r_b e^{-2ik\xi(t)}} . \quad (3.64)$$

En este caso, la fase del campo del láser satisface la condición

$$\psi(t) = \psi(t - 2T) - 2k\xi(t) , \quad (3.65)$$

la cual implica, que la fase es igual a la fase del campo en la cavidad mas un cambio de fase dado por $-2k\xi$ causado por el movimiento de los espejos.

Si \bar{E} es la amplitud del campo en la cavidad para la condición de resonancia, y está dado por

$$\bar{E} = \frac{t_a A}{1 - r_a r_b} , \quad (3.66)$$

entonces la solución para el campo en la cavidad es

$$E(t) = \bar{E} e^{i\psi(t)} . \quad (3.67)$$

3.5. Respuesta de estado estable

Dentro de un sistema, sabemos que los procesos transitorios que son causados debido a cambios bruscos en las condiciones exteriores y desaparecen rápidamente, los procesos de estado estable son causados por las excitaciones periódicas y pueden durar indefinidamente, por esta razón, realizaremos el análisis detallado para el estado estable en una cavidad Fabry-Perot.

En las secciones anteriores pudimos deducir que la dinámica del campo en una cavidad Fabry-Perot en el estado estable esta descrita por la ecuación (3.16) dada por

$$E(t) = t_a E_{in}(t) + r_a r_b e^{-2ikd} E(t - 2T), \quad (3.68)$$

con d dada por la ecuación (3.17) queda de la forma

$$E(t) = t_a E_{in}(t) + r_a r_b e^{-2ik[L+\xi(t)]} E(t - 2T). \quad (3.69)$$

Utilizaremos esta ecuación en el análisis de estado estable de una cavidad Fabry-Perot, en el cual la excitación periódica la realizaremos ya sea cambiando la amplitud, frecuencia o fase del campo del láser o el movimiento de los espejos.

3.5.1. Cavidad Fabry-Perot como un operador lineal

Respuesta al impulso

Consideremos una cavidad Fabry-Perot con los espejos en reposo, es decir $\xi(t) = 0$ y asumamos que su longitud está en perfecta resonancia ($e^{-2ikL} = 1$). Para este caso, la dinámica del campo en la cavidad está dada por

$$E(t) = t_a E_{in}(t) + r_a r_b E(t - 2T). \quad (3.70)$$

La solución a esta ecuación la obtenemos mediante el análisis de recorrido de vueltas completas que detallamos anteriormente en la sección 3.3 de la forma

$$E(t) = t_a \sum_{n=0}^{\infty} (r_a r_b)^n E_{in}(t - 2nT). \quad (3.71)$$

En este análisis podemos tratar a la cavidad como un operador lineal denotado por \hat{H} que actúa en el campo del láser y crea un campo interno dado por

$$E(t) = \hat{H} E_{in}(t). \quad (3.72)$$

Para este operador \hat{H} hay diversas representaciones, nosotros utilizaremos la integral de kernel, dada por

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-t')E_{in}(t')dt', \quad (3.73)$$

donde $H(t)$ es la respuesta al impulso de la cavidad, la cual está dada por

$$H(t) = t_a \sum_{n=0}^{\infty} (r_a r_b)^n \delta(t - 2nT). \quad (3.74)$$

A lo largo de este proyecto, la respuesta al impulso es la herramienta que mas nos conviene para el análisis de una cavidad Fabry-Perot[35][36], por lo tanto la emplearemos de forma permanente.

Función de transferencia

Sabemos con anterioridad que la transformada de Laplace² para una función del tiempo $E(t)$ esta dada por

$$\tilde{E}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} E(t) dt, \quad (3.75)$$

donde s es una variable compleja.

Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (3.16) que describe el campo interno de la cavidad Fabry-Perot, tenemos

$$\tilde{E}(s) = H(s)\tilde{E}_{in}(s) + r_a r_b e^{-2sT} b \tilde{E}(s), \quad (3.76)$$

y despejamos para obtener

$$\tilde{E}(s) = \frac{t_a \tilde{E}_{in}(s)}{[1 - r_a r_b e^{-2sT}]}.$$

Finalmente, ésta ecuación la podemos escribir de la forma

$$\tilde{E}(s) = t_a \tilde{E}_{in}(s), \quad (3.77)$$

donde

$$H(s) = \frac{t_a}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}, \quad (3.78)$$

²La notación de la tilde sobre cada parámetro hará referencia a la transformada de Laplace

y representa la transformada de Laplace del operador de la cavidad Fabry-Perot, o en el mismo caso, la transformada de Laplace de la función de respuesta al impulso, siendo ésta la *función de transferencia* de la cavidad.

Para hallar el comportamiento de esta función en el dominio de la frecuencia, encontramos en primer lugar los polos a partir de la ecuación característica, la cual está dada por

$$1 - r_a r_b e^{-2sT} = 0, \quad (3.79)$$

y hallamos su solución

$$s = \frac{\ln(r_a r_b)}{2T}. \quad (3.80)$$

Es necesario tener en cuenta que una de las principales características de la función de transferencia de la cavidad es que ésta es finita, es decir nunca se hace cero y periódica a lo largo del eje imaginario en el dominio de Laplace, por lo tanto cumple con la condición de periodicidad dada por

$$H\left(s + \frac{i\pi}{T}\right) = H(s). \quad (3.81)$$

Por lo tanto, los polos de la ecuación característica de la función de transferencia de la cavidad están dados por

$$p_n = \frac{\ln(r_a r_b)}{2T} + i\frac{\pi}{T}n. \quad (3.82)$$

donde n es un entero.

Estos polos están igualmente espaciados a lo largo del eje imaginario del plano complejo, y la separación entre polos adyacentes es igual al rango espectral libre (FSR). En la figura 4.5 se muestra el diagrama de Bode de la función de transferencia de la cavidad.

3.5.2. Respuesta de la cavidad Fabry-Perot a la amplitud del láser

Para obtener la respuesta de los campos en una cavidad cuando hay variaciones en la amplitud del láser, realizaremos el análisis de los campos internos y externos a

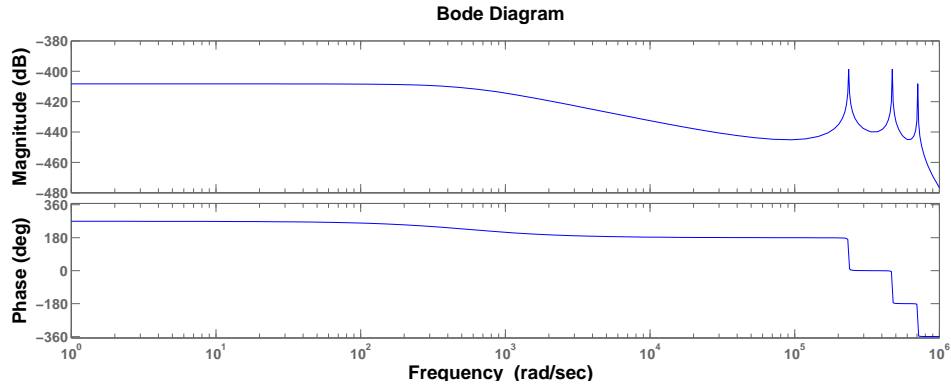


Figura 3.6: Diagrama de Bode de la Función $H(s)$

partir de las ecuaciones obtenidas anteriormente en la sección 3.3, pero sin tener en cuenta los términos que representan la dependencia de éstas con la longitud de la cavidad.

Campo interno

Al realizar este análisis decimos que longitud de una cavidad Fabry-Perot es constante y los cambios en la amplitud del campo del láser se describen por una función real dada por $A(t)$, por lo tanto, la ecuación del campo interno en la cavidad (4.16) está descrita por

$$E(t) = t_a A(t) + r_a r_b E(t - 2t). \quad (3.83)$$

Cuando se producen pequeñas variaciones en la amplitud del láser, la función que la describe estaría dada por

$$A(t) = A + \delta A(t), \quad (3.84)$$

donde A es la amplitud promedio y δA es una pequeña perturbación.

Por lo tanto, para este caso, el campo de la cavidad se debe aproximar a

$$E(t) = \bar{E} + \delta E(t), \quad (3.85)$$

donde \bar{E} es el campo promedio y δE es una pequeña perturbación.

Sustituyendo estas dos condiciones en la ecuación (3.83) que describe el campo interno de la cavidad, tenemos que

$$\bar{E} + \delta E(t) = t_a A + t_a \delta A(t) + r_a r_b \bar{E} + r_a r_b \delta E(t - 2t). \quad (3.86)$$

Separando obtenemos para el campo promedio la relación dada por

$$\bar{E} = \frac{t_a A}{1 - r_a r_b}, \quad (3.87)$$

y para la pequeña perturbación la expresión

$$\delta E(t) = t_a \delta A(t) + r_a r_b \delta E(t - 2t).$$

Ahora, aplicamos a esta ecuación la transformada de Laplace y resolvemos para finalmente obtener la solución para la perturbación

$$\delta \tilde{E}(s) = \frac{t_a \delta \tilde{A}(s)}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}. \quad (3.88)$$

Tomando en cuenta la función de transferencia de una cavidad Fabry-Perot dada por la ecuación (4.78) tenemos entonces que la pequeña perturbación en el campo interno de la cavidad queda de la forma

$$\delta \tilde{E}(s) = H(s) \tilde{A}(s). \quad (3.89)$$

Campos transmitido y reflejado

Como vimos anteriormente, variaciones en la amplitud del láser producen variaciones en el campo interno de una cavidad Fabry-Perot. Este hecho también tiene efecto en el campo transmitido, con lo cual podemos decir que

$$E_{tr}(t) = \bar{E}_{tr} + \delta E_{tr}(t), \quad (3.90)$$

donde \bar{E}_{tr} es el campo promedio y δE_{tr} es una pequeña perturbación.

Tomando la ecuación (3.28) que describe el campo transmitido en una cavidad, y reemplazando la condición anterior tenemos que

$$\bar{E}_{tr} + \delta E_{tr}(t) = t_b \bar{E}_{tr} + t_b \delta E(t - T).$$

Separando obtenemos para el campo promedio

$$\bar{E}_{tr} = t_b \bar{E}_{tr}, \quad (3.91)$$

y para la perturbación, desarrollamos el mismo procedimiento anterior aplicando la transformada de Laplace

$$\delta \tilde{E}_{tr}(s) = t_b e^{-sT} \delta \tilde{E}(s).$$

Si reemplazamos la ecuación (4.88) para la perturbación del campo interno obtenemos la solución para la perturbación en el campo transmitido en la cavidad

$$\delta\tilde{E}_{tr}(s) = t_b e^{-sT} \delta H(s) \tilde{A}(s). \quad (3.92)$$

De forma similar, analizamos el campo reflejado, el cual está dado por

$$E_{ref}(t) = \bar{E}_{ref} + \delta E_{ref}(t), \quad (3.93)$$

donde $E_{ref}(t)$ es el campo promedio y $\delta E_{ref}(t)$ es la pequeña perturbación.

Tomando la ecuación (3.43) que describe el campo reflejado en una cavidad, y reemplazando la condición anterior tenemos que

$$\bar{E}_{ref} + \delta E_{ref}(t) = [A + \delta A(t)] \rho(\phi),$$

donde $\rho(\phi)$ es la reflectividad estática de la cavidad y está definida por la ecuación (3.44).

Separando podemos ver que el campo promedio es

$$\bar{E}_{ref} = A \rho(\phi), \quad (3.94)$$

y para la perturbación es

$$\delta\tilde{E}_{ref}(s) = \delta\tilde{A}(s) \rho(s), \quad (3.95)$$

donde $\rho(s)$ está dada por

$$\rho(s) = r_a - \frac{t_a^2 r_b e^{-2sT}}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}. \quad (3.96)$$

3.5.3. Respuesta de la cavidad Fabry-Perot a la frecuencia y fase del láser

De la misma forma como hicimos el análisis para la respuesta de los campos en una cavidad cuando hay variaciones en la amplitud del láser realizaremos este análisis para la respuesta a las variaciones de frecuencia y fase del láser sin tener en cuenta los términos que representan la dependencia de estos con la longitud de la cavidad.

Variaciones en la fase del láser

En este caso tomaremos el campo del láser teniendo en cuenta las variaciones en su fase mediante la relación

$$E_{in}(t) = Ae^{i\psi(t)}. \quad (3.97)$$

Con esta condición, el campo interno en la cavidad dado por la ecuación (3.16) queda de la forma

$$E(t) = t_a A e^{i\psi(t)} + r_a r_b E(t - 2T). \quad (3.98)$$

Para el caso que las variaciones en la fase del láser son pequeñas ($|\psi| \ll \pi$) podemos aplicar la siguiente aproximación

$$e^{i\psi(t)} \approx 1 + i\psi(t). \quad (3.99)$$

y tomando cuenta que el campo lo tomamos de la forma

$$E(t) = \bar{E} + \delta E(t), \quad (3.100)$$

podemos hallar la solución para la perturbación en el campo de la cavidad, reemplazando las dos condiciones anteriores en la ecuación (3.98), con lo cual tenemos que

$$\bar{E} + \delta E(t) = t_a A + it_a A \psi(t) + r_a r_b \bar{E} + r_a r_b \delta E(t - 2T), \quad (3.101)$$

separando encontramos la relación para el campo promedio

$$\bar{E} = \frac{t_a A}{1 - r_a r_b}. \quad (3.102)$$

y para la perturbación del campo en la cavidad

$$\delta \tilde{E}(s) = \frac{it_a A \tilde{\psi}(s)}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}, \quad (3.103)$$

y reemplazamos la ecuación (4.78) que representa la función de transferencia de una cavidad Fabry-Perot obtenemos la solución para la pequeña perturbación del campo

$$\delta \tilde{E}(s) = iAH(s)\tilde{\psi}(s). \quad (3.104)$$

Este resultado está dado sólo para variaciones pequeñas en la fase del láser.

Sin embargo, en la práctica las variaciones en la fase del láser suelen ser grandes

(comparadas con π). Por lo cual, para grandes variaciones en la fase del láser, el campo en la cavidad no se aproxima a un campo constante \bar{E} sino a una función dada por $\bar{E}e^{i\psi(t)}$, y la condición para el campo queda dada por

$$E(t) = [\bar{E} + \delta E(t)]e^{i\psi(t)}, \quad (3.105)$$

y el campo interno en la cavidad dado por la ecuación (4.16) queda de la forma

$$\bar{E} + \delta E(t) = t_a A + r_a r_b [\bar{E} + \delta E(t - 2T)]e^{-i[\psi(t) - \psi(t - 2T)]}. \quad (3.106)$$

Sin embargo, debido a que la fase $\psi(t)$ puede ser muy larga, su cambio durante una vuelta completa de la luz en la cavidad es usualmente pequeño, por lo cual podemos aplicar la aproximación

$$e^{-i[\psi(t) - \psi(t - 2T)]} \approx 1 - i[\psi(t) - \psi(t - 2T)]. \quad (3.107)$$

Entonces, reemplazando esta condición en la ecuación (3.106) tenemos

$$\begin{aligned} \bar{E} + \delta E(t) &= t_a A + r_a r_b \bar{E} - i r_a r_b \bar{E} [\psi(t) - \psi(t - 2T)] \\ &+ r_a r_b \delta E(t - 2T) - i r_a r_b \delta E(t - 2T) [\psi(t) - \psi(t - 2T)], \end{aligned}$$

Separando variables encontramos la expresión para la perturbación del campo

$$\delta \tilde{E}(s) = -\frac{i r_a r_b \bar{E} \tilde{\psi}(s) (1 - e^{-2sT})}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}, \quad (3.108)$$

Finalmente introducimos una expresión para la llamada *función de transferencia de fase* dada por

$$H_\psi(s) = \frac{1 - e^{-2sT}}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}, \quad (3.109)$$

por lo tanto, la expresión para la perturbación del campo dada por variaciones grandes en la fase del láser queda de la forma

$$\delta \tilde{E}(s) = -i r_a r_b \bar{E} H_\psi(s) \tilde{\psi}(s). \quad (3.110)$$

Variaciones en la frecuencia del láser

Al presentarse variaciones en la frecuencia del láser $\omega_s(t)$ el campo del láser se ve afectado a través de variaciones producidas en su fase mediante la relación entre frecuencia y fase dada por

$$\psi(t) = \int_0^t \omega_s(t') dt', \quad (3.111)$$

en el dominio de Laplace esta expresión queda de la forma

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{s} \tilde{\omega}_s(s), \quad (3.112)$$

Por lo tanto, la respuesta de una cavidad Fabry-Perot debida a cambios en la frecuencia del láser la podemos encontrar mediante la forma

$$H_\omega(s) = \frac{1}{s} H_\psi(s), \quad (3.113)$$

donde $H_\psi(s)$ esta dada por la ecuación (3.109).

Reemplazando esta condición tenemos que

$$H_\omega(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{1 - e^{-2sT}}{1 - r_a r_b e^{-2sT}} \right] \quad (3.114)$$

Esta función de transferencia tiene la dimension de $1/s$ y por lo tanto su magnitud depende de las unidades de s . Para solucionar este problema normalizaremos $H_\omega(s)$ a 1 en DC haciendo ($s=0$) y obtenemos la respuesta de la cavidad

$$H_\omega(s) = \left(\frac{1 - e^{-2sT}}{2sT} \right) \left(\frac{1 - r_a r_b}{1 - r_a r_b e^{-2sT}} \right). \quad (3.115)$$

Para hallar la respuesta de la perturbación del campo en la cavidad, tomamos como punto de partida la respuesta dada para el caso anterior, cuando hay variaciones en la fase del campo del láser dada por la ecuación (3.110) y reemplazamos las condiciones para $H_\psi(s)$ ecuación (3.109), \bar{E} ecuación (3.66) y $\tilde{\psi}(s)$ ecuación (3.112), para obtener

$$\delta \tilde{E}(s) = -i r_a r_b \left(\frac{t_a A}{1 - r_a r_b} \right) \left(\frac{1 - e^{-2sT}}{1 - r_a r_b e^{-2sT}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \tilde{\omega}_s(s),$$

reordenando términos y haciendo simples operaciones matemáticas obtenemos

$$\delta \tilde{E}(s) = -\frac{i}{2} t_a A T \left(\frac{4 r_a r_b}{(1 - r_a r_b)^2} \right) \left(\frac{1 - e^{-2sT}}{2sT} \right) \left(\frac{1 - r_a r_b}{1 - r_a r_b e^{-2sT}} \right) \tilde{\omega}_s(s).$$

Finalmente teniendo en cuenta las ecuaciones (3.51) y (3.115) para F y $H_\omega(s)$ respectivamente tenemos que la solución para la perturbación del campo causada por variaciones en la frecuencia del láser está dada por

$$\delta \tilde{E}(s) = -\frac{i}{2} t_a A T F H_\omega(s) \tilde{\omega}_s(s). \quad (3.116)$$

3.5.4. Respuesta de la cavidad Fabry-Perot a las variaciones en la longitud de la cavidad

Este análisis lo realizaremos con el fin de encontrar la respuesta de una cavidad Fabry-Perot cuando hay movimiento de los espejos, es decir cuando cambia su longitud, manteniendo las condiciones de amplitud, frecuencia y fase del láser constantes, es decir con

$$E_{in} = A. \quad (3.117)$$

Recordando mediante la ecuación (3.18) que la parte variable o dinámica de la longitud de una cavidad está dada por

$$\xi(t) = x_b(t - T) - x_a(t), \quad (3.118)$$

tenemos que el campo en la cavidad dado por la ecuación (3.16) queda de la forma

$$E(t) = t_a A + r_a r_b e^{-2ik\xi(t)} E(t - 2T). \quad (3.119)$$

Ahora, si las variaciones en la longitud de la cavidad son pequeñas, aplicamos la siguiente aproximación

$$e^{-2ik\xi(t)} \approx 1 - 2ik\xi(t), \quad (3.120)$$

siendo esta aproximación válida cuando los cambios en la longitud de la cavidad son mucho mas pequeños que el ancho de la resonancia.

Sabemos que la solución para el campo de la cavidad debe tomar la forma de

$$E(t) = \bar{E} + \delta E(t), \quad (3.121)$$

donde \bar{E} es el campo promedio y $\delta E(t)$ es una pequeña perturbación, entonces con base en esto hallamos la solución para (3.119) tomando en cuenta (3.120) y (3.121) tenemos

$$\begin{aligned} \bar{E} + \delta E(t) &= t_a A + r_a r_b \bar{E} + r_a r_b \delta E(t - 2T) - 2ik\xi(t) r_a r_b \bar{E} \\ &\quad - 2ik\xi(t) r_a r_b \delta E(t - 2T). \end{aligned}$$

De donde obtenemos la expresión para la perturbación del campo es

$$\delta \tilde{E}(s) = -\frac{2ik\tilde{\xi}(s)r_a r_b}{1 - r_a r_b e^{-2sT}} \bar{E}.$$

Reemplazando ahora la ecuación (3.66) para el campo promedio y tomando la expresión para la función de transferencia de la cavidad dada en la ecuación (3.78) tenemos que

$$\delta\tilde{E}(s) = -2ik \frac{r_a r_b A}{1 - r_a r_b} H(s) \tilde{\xi}(s). \quad (3.122)$$

Finalmente introducimos un nuevo término llamado *función de transferencia de longitud normalizada* dado por

$$H_L(s) = \frac{1 - r_a r_b}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}. \quad (3.123)$$

Si relacionamos esta función de transferencia con la expresión para $H(s)$ dada por la ecuación (4.78) obtenemos que

$$H(s) = H_L(s) \frac{t_a}{1 - r_a r_b}. \quad (3.124)$$

Teniendo en cuenta esta expresión, reordenando términos y realizando simples operaciones matemáticas en la solución dada por (3.122) llegamos a

$$\delta\tilde{E}(s) = -\frac{i}{2} k t_a A \frac{4r_a r_b}{(1 - r_a r_b)^2} H_L(s) \tilde{\xi}(s),$$

además, con la ecuación (3.51) para el coeficiente de Fineza F llegamos a la expresión final para la solución de la perturbación del campo, cuando se presentan variaciones en la longitud de la cavidad

$$\delta\tilde{E}(s) = -\frac{i}{2} k t_a A F H_L(s) \tilde{\xi}(s). \quad (3.125)$$

3.5.5. Función de transferencia frecuencia-longitud

En la práctica, la frecuencia del láser y la longitud de la cavidad pueden variar al mismo tiempo, por lo que se hace necesario analizar conjuntamente estos dos parámetros para obtener una respuesta más acorde a un sistema real.

Por lo tanto, para hacer este análisis tendremos en cuenta las variaciones en la frecuencia del láser ($E_{in} = Ae^{i\psi(t)}$) y en la longitud de la cavidad ($\xi(t) = x_b(t-T) - x_a$), con lo cual la ecuación del campo en la cavidad está dada por

$$E(t) = t_a A e^{i\psi(t)} + r_a r_b e^{-2ik\xi(t)} E(t - 2T). \quad (3.126)$$

La solución para esta ecuación la hallamos combinando las soluciones particulares para las variaciones en la frecuencia del láser dada por (3.116) y en la longitud de la cavidad (3.125)

$$\delta\tilde{E}(s) = -\frac{i}{2}t_a AFT H_\omega(s)\tilde{\omega}(s) - \frac{i}{2}kt_a AFH_L(s)\tilde{\xi}(s),$$

reemplazando las ecuaciones para T (3.8), $H_\omega(s)$ (3.115) y $H_L(s)$ (3.123) tenemos que

$$\delta\tilde{E}(s) = -\frac{i}{2}t_a k AFL H_L(s) \left[\left(\frac{1 - e^{-2sT}}{2sT} \right) \frac{\tilde{\omega}_s(s)}{\omega} + \frac{\tilde{\xi}(s)}{L} \right].$$

Finalmente unificamos los términos constantes en w e introducimos un nuevo término llamado *función de transferencia Frecuencia a Longitud* dado por

$$U(s) = \frac{1 - e^{-2sT}}{2sT}, \quad (3.127)$$

y obtenemos la solución para la perturbación del campo

$$\delta\tilde{E}(s) = w H_L(s) \left[U(s) \frac{\tilde{\omega}_s(s)}{\omega} + \frac{\tilde{\xi}(s)}{L} \right]. \quad (3.128)$$

De esta expresión podemos observar que la perturbación del campo causada por variaciones en la longitud de la cavidad cancela la perturbación del campo causada por variaciones en la frecuencia del láser si

$$\frac{\tilde{\xi}(s)}{L} = -U(s) \frac{\tilde{\omega}(s)}{\omega}. \quad (3.129)$$

Esta expresión es llamada *condición de compensación*, la cual se satisface si las variaciones en la longitud de la cavidad son compensadas por variaciones en la frecuencia del láser y viceversa.

3.5.6. Espejos suspendidos como un cuerpo rígido

En los detectores de OG por interferometría laser, los espejos están suspendidos en alambres para aislarlos de su entorno, por ejemplo, en LIGO los espejos se encuentran suspendidos en un alambre de vuelta simple como se muestra en el Figura 3.6. En este capítulo analizaremos el movimiento de un espejo suspendido como un todo, dejando de lado los modos elásticos del substrato del espejo y la vibración de los alambres de suspension.

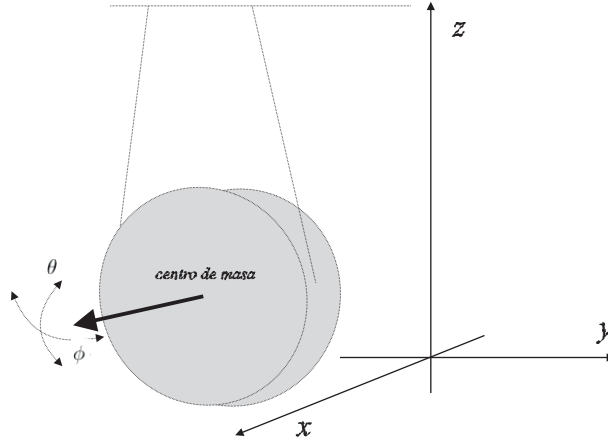


Figura 3.7: Dimensiones de un espejo de un detector de OGs

3.5.7. Lagrangiano para un espejo suspendido

Cuando es considerado como un cuerpo rígido, un espejo suspendido tiene seis grados de libertad, que están dados por: las tres coordenadas del centro de masa y los tres ángulos de rotación. Es importante saber que no todos los grados de libertad son igualmente importantes, por ejemplo, las traslaciones de los espejos en el plano yz y las rotaciones a lo largo de su eje de simetría tiene un pequeño efecto en la reflexión de la luz y por lo tanto se pueden ignorar al momento de realizar el análisis del espejo. Los restantes tres grados de libertad son la coordenada x del centro de masa y los ángulos esféricos θ y ϕ los cuales definen la orientación del vector normal a la superficie del espejo dada por:

$$n_x = \cos \theta \cos \phi, \quad (3.130)$$

$$n_y = \cos \theta \sin \phi, \quad (3.131)$$

$$n_z = \sin \theta. \quad (3.132)$$

Definiremos θ como el ángulo entre el vector normal y el plano horizontal xy , y ϕ como el ángulo entre el plano de rotación ϕ y el plano xz . En la práctica, los detectores de OG estos ángulos son pequeños, aproximadamente menos que 1 mrad.

Realizaremos nuestro análisis con las coordenadas x , θ y ϕ , las cuales para el detector LIGO son llamadas *posicion*, *pitch* y *yaw*[14], nombres que tomaremos también en nuestro análisis. Cuando un espejo es excitado por un movimiento sísmico, éstas pueden ser descritas por las traslaciones y rotaciones de los puntos de suspensión, los cuales denotaremos para nuestro desarrollo como $x_{sp}(t)$ y $\phi_{sp}\phi(t)$ respectivamente. Todas estas notaciones se muestran en la Figura 3.7.

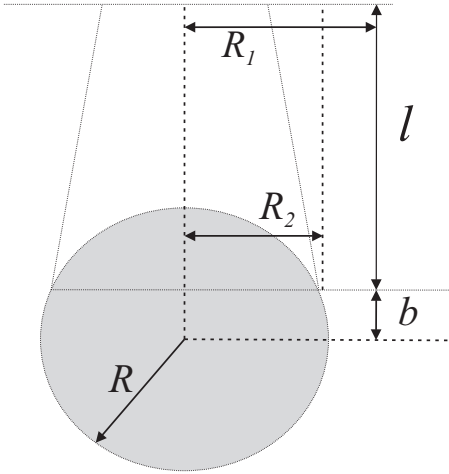


Figura 3.8: Dimensiones de un espejo de un detector de OG

La simetría de la suspensión y del espejo con respecto al plano zx genera un desacoplamiento del yaw de la posición y el pitch, con lo cual se definen dos tipos de movimientos independientes: el *movimiento planar* en el cual sólo son excitados x y θ y el *movimiento yaw* donde sólo es excitado ϕ , estos dos tipos de movimientos son mostrados en la Figura 3.8. Para describir la dinámica de los espejos suspendidos utilizaremos la función de Lagrangiano, la cual hallaremos al examinar estos dos tipos de movimientos por separado.

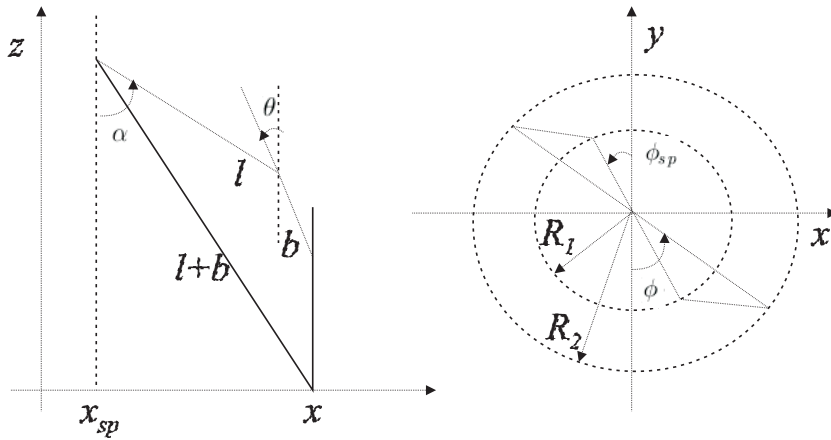


Figura 3.9: Movimiento *planar* del espejo visto desde un lado. Movimiento del espejo visto desde arriba

Movimiento Planar

De la figura 5.3(a) podemos observar que las coordenadas del centro de masa son

$$x = x_{sp} + l \sin \alpha + b \sin \theta, \quad (3.133)$$

$$z = l + b - l \cos \alpha - b \cos \theta, \quad (3.134)$$

donde, si los ángulos α y θ son pequeños podemos aproximar a

$$x \approx x_{sp} + l\alpha + b\theta, \quad (3.135)$$

$$z \approx \frac{1}{2}l\alpha^2 + \frac{1}{2}b\theta^2. \quad (3.136)$$

Podemos elegir como variable independiente a x o a α , sin embargo, en el caso de que el espejo sea una parte de una cavidad Fabry-Perot suspendida, es preferible tomar a x debido a que esta directamente relacionada con la longitud de la cavidad. Por lo tanto, despejando a α de la ecuación (3.135) tenemos que

$$\alpha = \frac{1}{l}(x - x_{sp} - b\theta), \quad (3.137)$$

con lo cual, la elevación del centro de masa durante el movimiento planar en la ecuación (3.136) lo hallamos reemplazando la anterior condición

$$z = \frac{1}{2l}(x - x_{sp} - b\theta)^2 + \frac{1}{2}b\theta^2. \quad (3.138)$$

Movimiento Yaw

Cuando sólo se produce rotación de ϕ , para hallar la coordenada del centro de masa para este movimiento z' primero hallamos a partir de la Figuras (3.7) y (3.8) la proyección del alambre en el plano horizontal d mediante

$$d^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos(\phi - \phi_{sp}), \quad (3.139)$$

Tenemos en cuenta que la longitud del alambre no cambia durante la rotación, lo que significa que

$$l^2 + (R_1 - R_2)^2 = (l - z')^2 + d^2, \quad (3.140)$$

donde el lado derecho corresponde a la longitud del alambre menos la proyección horizontal de este en el plano horizontal antes de la rotación y el lado izquierdo corresponde después de la rotación. Resolviendo esta ecuación tenemos que

$$R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2 = -2lz' + z'^2 + d^2,$$

reemplazando d dado por la ecuación (5.10)

$$z'^2 - 2lz' = 2R_1R_2(\cos(\phi - \phi_{sp}) - 1),$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) \quad (3.141)$$

tenemos que

$$\cos(\phi - \phi_{sp}) = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(\phi - \phi_{sp}) \quad (3.142)$$

reemplazando esta condición nos queda

$$z'^2 - 2lz' = 4R_1R_2\sin^2\frac{1}{2}(\phi - \phi_{sp}),$$

finalmente, si $z' \ll l$ entonces z'^2 se puede despreciar, por lo tanto

$$z' = \frac{2R_1R_2}{l}\sin^2\frac{1}{2}(\phi - \phi_{sp}).$$

Por último, como explicamos anteriormente el ángulo θ es pequeño, lo que conlleva a un ángulo θ_{sp} pequeños, por lo tanto mediante aproximaciones tenemos que

$$z' = \frac{R_1R_2}{2l}(\phi - \phi_{sp})^2. \quad (3.143)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento del espejo suspendido utilizaremos la función *Lagrangiano*, la cual nos permite tener la evolución temporal del sistema físico representado por el espejo. Después de conocer la función Lagrangiano para el sistema, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange particulares para el lagrangiano encontraremos finalmente las ecuaciones de movimiento.

En el formalismo matemático para la función Lagrangiana definimos que la expresión para un sistema de coordenadas concreto está relacionada con la energía cinética y la energía potencial de dicho sistema, por lo tanto

$$L = E_c - V. \quad (3.144)$$

donde E_c es la energía cinética y V es la energía potencial del sistema.

Para el análisis de la energía cinética total del sistema del espejo suspendido es conveniente hallarla mediante la suma de la energía cinética de traslación y la energía cinética de rotación sobre el centro de masa, es decir

$$E_c = E_{tras} + E_{rot}, \quad (3.145)$$

donde E_{tras} es la energía cinética de traslación, que para el caso de un cuerpo rígido en rotación es la asociada al desplazamiento del centro de masa del cuerpo a través del espacio y E_{rot} es la energía cinética de rotación que es la asociada al movimiento de rotación con cierta velocidad angular.

En este contexto, la expresión matemática para la energía cinética de traslación es

$$E_{tras} = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.146)$$

donde m es la masa y v es la velocidad lineal del espejo. Por otra parte, la energía cinética de rotación está dada por

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 I, \quad (3.147)$$

donde ω es la velocidad angular y I es el momento de inercia del espejo.

Para nuestro caso particular tenemos entonces que la velocidad lineal del espejo es la derivada de la posición x , la velocidad angular está dada por las derivadas de los ángulos de rotación θ y ϕ y el momento de inercia está dado por los momentos de inercia para θ y ϕ respectivamente, es decir

$$v = \dot{x}, \quad (3.148)$$

$$\omega = \omega_\theta + \omega_\phi = \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2, \quad (3.149)$$

$$I = I_\theta + I_\phi = I_\theta + I_\phi. \quad (3.150)$$

Con las anteriores condiciones, la energía cinética total del espejo está dada por

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}(I_\theta\dot{\theta}^2 + I_\phi\dot{\phi}^2). \quad (3.151)$$

Por otra parte, la energía potencial del espejo suspendido está dada por la suma de su energía potencial al desplazarse el espejo desde una su centro de masa en reposo hasta su centro de masa después de la rotación, es decir

$$V = mg(z + z'), \quad (3.152)$$

donde m es la masa del espejo, g es la gravedad y z y z' son los centros de masa antes y después de la rotación. Reemplazando las ecuaciones (3.138) y (3.143) para z y z' respectivamente tenemos

$$V = \frac{mg}{2l} \left[(x - x_{sp} - b\theta)^2 + l b \theta^2 + R_1 R_2 (\theta - \theta_{sp})^2 \right]. \quad (3.153)$$

Finalmente, hallamos entonces la expresión de la función Lagrangiano dada por la ecuación (3.144), reemplazando las expresiones particulares para la energía cinética (3.151) y para la energía potencial (3.153), con lo cual llegamos a

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_\phi \dot{\phi}^2 - \frac{mg}{2l} (x - x_{sp} - b\theta)^2 + \frac{mg}{2l} l b \theta^2 + \frac{mg}{2l} R_1 R_2 (\theta - \theta_{sp})^2. \quad (3.154)$$

3.5.8. Ecuaciones de movimiento

Como explicamos anteriormente, las ecuaciones de movimiento para el espejo suspendido las hallaremos por medio del Lagrangiano y cumpliendo las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales dicen que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (3.155)$$

donde q_i representa a x , θ y ϕ . Hallando la condición de Euler-Lagrange para cada una de estas coordenadas debemos, primero separar de la función Lagrangiano (5.25), las expresiones correspondientes a cada una de ellas, obteniendo

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{mg}{2l} (x - x_{sp} - b\theta)^2, \\ L_\theta &= \frac{1}{2} I_\theta \dot{\theta}^2 - \frac{mg}{2} b \theta^2 - \frac{mg}{2l} (x - x_{sp} - b\theta)^2, \\ L_\phi &= \frac{1}{2} I_\phi \dot{\phi}^2 - \frac{mg}{2l} R_1 R_2 (\phi - \phi_{sp})^2. \end{aligned}$$

Con estas expresiones resolvemos la condición dada por Euler-Lagrange en la ecuación (3.155) para cada una de ellas.

Para la posición x tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_x}{\partial \dot{x}} &= m \dot{x}, \\ \frac{\partial L_x}{\partial x} &= -\frac{mg}{l} (x - x_{sp} - b\theta), \end{aligned}$$

y reemplazamos en (5.26) para obtener la expresión para x

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}(x - x_{sp} - b\theta). \quad (3.156)$$

Para el ángulo θ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\theta}{\partial \dot{\theta}} &= I_\theta \ddot{\theta}, \\ \frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} &= -mgb\theta + \frac{mg}{l}b(x - x_{sp} - b\theta), \end{aligned}$$

reemplazando en (5.26) llegamos a la expresión para θ

$$I_\theta = -mgb\theta + \frac{mg}{l}b(x - x_{sp} - b\theta). \quad (3.157)$$

Por último para el ángulo ϕ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\phi}{\partial \dot{\phi}} &= I_\phi \ddot{\phi}, \\ \frac{\partial L_\phi}{\partial \phi} &= -\frac{mg}{l}R_1R_2(\phi - \phi_{sp}), \end{aligned}$$

reemplazando en (5.26) llegamos a la expresión para ϕ

$$I_\phi = -\frac{mg}{l}R_1R_2(\phi - \phi_{sp}). \quad (3.158)$$

Por lo tanto, las *ecuaciones de movimiento* para el espejo suspendido son

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}(x - x_{sp} - b\theta), \quad (3.159)$$

$$I_\theta \ddot{\theta} = -mgb\theta + \frac{mg}{l}b(x - x_{sp} - b\theta), \quad (3.160)$$

$$I_\phi \ddot{\phi} = -\frac{mg}{l}R_1R_2(\phi - \phi_{sp}). \quad (3.161)$$

Para estas ecuaciones las frecuencias naturales para las oscilaciones del espejo son

$$\omega_x^2 = \frac{g}{l}, \quad (3.162)$$

$$\omega_\theta^2 = \frac{mg}{I_\theta l}b(l + b), \quad (3.163)$$

$$\omega_\phi^2 = \frac{mg}{I_\phi l}R_1R_2. \quad (3.164)$$

Las ecuaciones de movimiento (3.159), (3.160) y (3.161) describen el movimiento de un espejo suspendido cuando no hay fricción. Sin embargo, en la práctica todas los sistemas suspendidos tienen fricción, por lo tanto en nuestro análisis debemos considerar el coeficiente de fricción dado por $\gamma_i \dot{q}_i$ para cada coordenada. Para cada caso hacemos el desarrollo matemático, por ejemplo para la posición x (ecuación 3.159) tenemos

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}(x - x_{sp} - b\theta),$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}(x_{sp} + b\theta),$$

adicionando el término de fricción

$$\ddot{x} + \gamma_x \dot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}(x_{sp} + b\theta),$$

y reemplazando la ecuación (5.33), obtenemos la expresión teniendo en cuenta la fricción para x

$$\ddot{x} + \gamma_x \dot{x} + \omega_x^2 x = \omega_x^2 (x_{sp} + b\theta). \quad (3.165)$$

Para el ángulo θ tenemos de la ecuación (3.160)

$$I_\theta \ddot{\theta} = -mgb\theta + \frac{mg}{l}b(x - x_{sp} - b\theta),$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgb(l+b)}{I_\theta l} \theta = \frac{mg}{I_\theta l} b(x - x_{sp}),$$

adicionando el término de fricción

$$\ddot{\theta} + \gamma_\theta \dot{\theta} + \frac{mgb(l+b)}{I_\theta l} \theta = \frac{mg}{I_\theta l} b(x - x_{sp}),$$

reemplazando la ecuación (5.34), obtenemos la expresión para θ

$$\ddot{\theta} + \gamma_\theta \dot{\theta} + \omega_\theta^2 \theta = \frac{\omega_\theta^2}{(l+b)} (x - x_{sp}),$$

Por último para el ángulo ϕ tenemos de la ecuación (3.161)

$$I_\phi \ddot{\phi} = -\frac{mg}{l} R_1 R_2 (\phi - \phi_{sp}),$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mg}{I_\phi l} R_1 R_2 \phi = \frac{mg}{I_\phi l} R_1 R_2 \phi_{sp},$$

adicionando el término de fricción

$$\ddot{\phi} + \gamma_{\phi}^2 \dot{\phi} + \frac{mg}{I_{\phi}l} R_1 R_2 \phi = \frac{mg}{I_{\phi}l} R_1 R_2 \phi_{sp},$$

y reemplazando la ecuación (5.35), obtenemos la expresión para ϕ

$$\ddot{\phi} + \gamma_{\phi}^2 \dot{\phi} + \omega_{\phi}^2 \phi = \omega_{\phi}^2 \phi_{sp},$$

Después de estos procedimientos, tenemos entonces las ecuaciones de movimiento para un espejo suspendido teniendo en cuenta la fricción

$$\ddot{x} + \gamma_x \dot{x} + \omega_x^2 x = \omega_x^2 (x_{sp} + b\theta), \quad (3.166)$$

$$\ddot{\theta} + \gamma_{\theta} \dot{\theta} + \omega_{\theta}^2 \theta = \frac{\omega_{\theta}^2}{(l+b)} (x - x_{sp}), \quad (3.167)$$

$$\ddot{\phi} + \gamma_{\phi}^2 \dot{\phi} + \omega_{\phi}^2 \phi = \omega_{\phi}^2 \phi_{sp}. \quad (3.168)$$

Capítulo 4

Interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

La configuración óptica adoptada por los detectores de ondas gravitacionales LIGO, TAMA y VIRGO es un interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot en sus brazos. Dentro de este contexto, en capítulos anteriores hemos realizado el análisis detallado para una cavidad y su respuesta a los parámetros que afectan su punto de operación como lo son: amplitud, frecuencia y fase del láser, y longitud de la cavidad. En este capítulo haremos ahora el análisis de la dinámica de los campos y la respuesta de un interferómetro de Michelson cuando dos cavidades son implementadas en sus brazos, como se muestra en la Figura 4.1.

4.1. Distancias y propagación de campos

Distancias y retardos

Como sistema global de coordenadas para nuestro análisis tomamos el origen ubicado en el plano de referencia del divisor de haz, y los brazos del interferómetro alineados en los ejes x y y .

Asumiendo que las dos cavidades en los brazos del interferómetro tienen la misma longitud L y el tiempo de tránsito de la luz en cada una está dado por la ecuación (3.8), y denotando por l_x y l_y a las distancias entre los planos de referencia del divisor de haz y los espejos de entrada de las cavidades en los brazos, tenemos

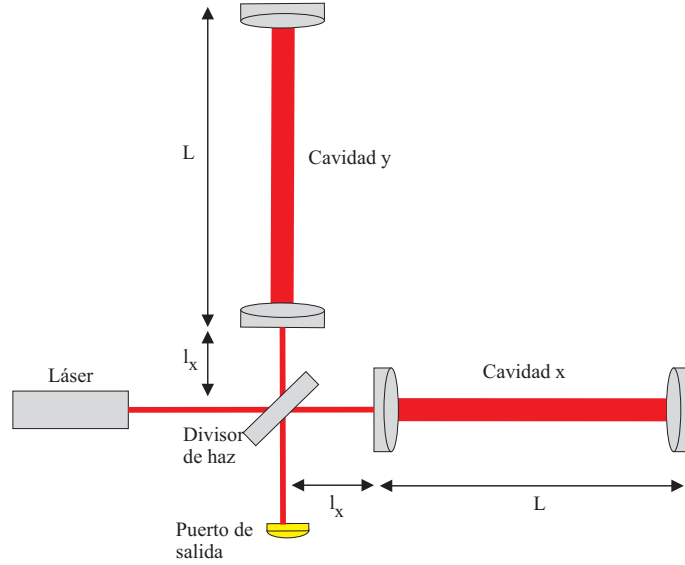


Figura 4.1: Campos en una cavidad Fabry-Perot

que el tiempo de tránsito de la luz correspondiente para cada una está dada por

$$\theta_x = \frac{l_x}{c}, \quad (4.1)$$

$$\theta_y = \frac{l_y}{c}. \quad (4.2)$$

Definimos también la longitud promedio y la longitud *asimétrica* de la forma

$$\bar{l} = \frac{l_x + l_y}{2}, \quad (4.3)$$

$$l_{asim} = \frac{l_x - l_y}{2}, \quad (4.4)$$

y los correspondientes tiempos de tránsito de la luz para estas longitudes son

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{l}}{c}, \quad (4.5)$$

$$\theta_{asim} = \frac{l_{asim}}{c}. \quad (4.6)$$

En el análisis realizado en el capítulo 3 tomamos el movimiento de los espejos en su sistema de coordenadas local, sin embargo en este capítulo, las coordenadas para los espejos de las cavidades tendrán coordenadas $(x_a, 0)$ y $(x_b, 0)$ para la cavidad en el brazo x y $(0, y_a)$ y $(0, y_b)$ para la cavidad en el brazo y .

Para cada cavidad, la longitud está dada por

$$L + \xi_x(t), \quad (4.7)$$

$$L + \xi_y(t), \quad (4.8)$$

donde las partes variables de las longitudes están dadas por

$$\xi_x(t) = x_b(t - T) - x_a, \quad (4.9)$$

$$\xi_y(t) = y_b(t - T) - y_a. \quad (4.10)$$

4.1.1. Ecuaciones de campos

De la misma forma como derivamos las ecuaciones de campo para una cavidad Fabry-Perot, ahora hallaremos las ecuaciones para el interferómetro de Michelson con dos cavidades. Las distancias y la dirección de los campos se muestran en la Figura 4.2.

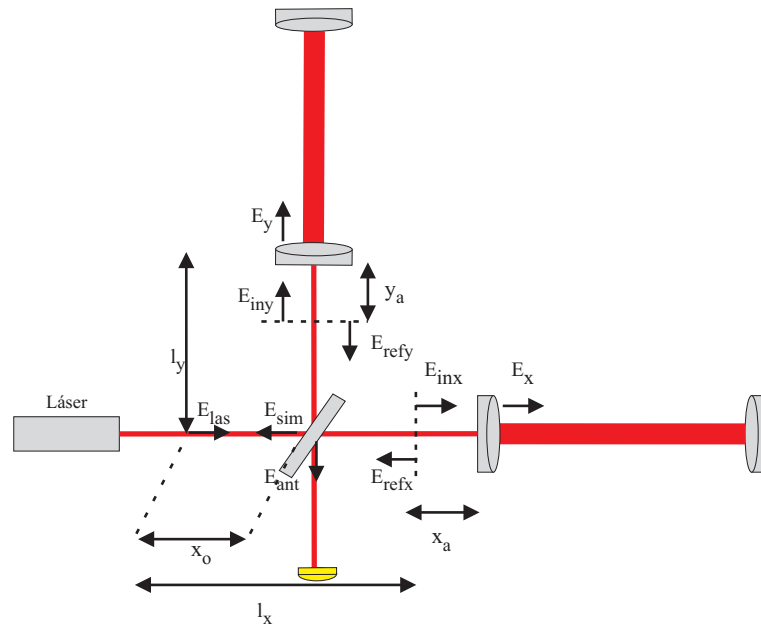


Figura 4.2: Campos en un interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

Definimos entonces el campo del láser $E_{las}(t)$ en el plano de referencia cercano al divisor de haz. En este contexto, los campos incidentes en las cavidades de los brazos del interferómetro están dados por

$$E_{in,x}(t) = t_0 E_{las}(t - \theta_x) e^{-ikl_x}, \quad (4.11)$$

$$E_{in,y}(t) = -r_0 E_{las}(t - \theta_y) e^{-ik[l_y + x_0(t - \theta_y)]}, \quad (4.12)$$

donde r_0 es la reflectividad, t_0 es la transmisividad y x_0 es la coordenada del divisor de haz, a lo largo del eje x . En las ecuaciones anteriores se puede observar que el campo transmitido en el divisor de haz, el cual corresponde al campo incidente en la cavidad del brazo x mantiene el mismo signo, mientras que el reflejado en el divisor de haz que corresponde al campo incidente en la cavidad del brazo y adquiere el signo menos.

De forma similar como lo definimos en el capítulo 3, denotaremos el campo E_x y E_y a los campos internos en las cavidades y los hallamos basándonos en la ecuación (3.17), obteniendo

$$E_x(t) = t_a E_{in,x}(t) + r_a r_b e^{-2ik[L + \xi_x(t)]} E_x(t - 2T), \quad (4.13)$$

$$E_y(t) = t_a E_{in,y}(t) + r_a r_b e^{-2ik[L + \xi_y(t)]} E_y(t - 2T). \quad (4.14)$$

Ahora definiremos los campos reflejados en los espejos de entrada de las cavidades de regreso hacia el divisor de haz, y lo haremos en las mismas ubicaciones donde definimos los campos incidentes. Tomando la ecuación (4.27), los campos reflejados en cada brazo del interferómetro están dados por

$$E_{ref,x}(t) = e^{-2ikx_a(t)} \left[\frac{r_a^2 + t_a^2 E_{in,x}(t) - t_a E_x(t)}{r_a} \right], \quad (4.15)$$

$$E_{ref,y}(t) = e^{-2iky_a(t)} \left[\frac{r_a^2 + t_a^2 E_{in,y}(t) - t_a E_y(t)}{r_a} \right]. \quad (4.16)$$

Cuando estos dos campos reflejados en las cavidades llegan al divisor de haz se produce interferencia entre ellos y a partir de esta recombinación se generan dos campos definidos en la superficie reflectiva del divisor de haz denominados *campo simétrico* y *campo antisimétrico* y están dados por

$$E_{sim}(t) = t_0 E_{ref,x}(t - \theta_x) e^{-ik[l_x - x_0(t)]} - r_0 E_{ref,y}(t - \theta_y) e^{-ikl_y}, \quad (4.17)$$

$$E_{ant}(t) = r_0 E_{ref,x}(t - \theta_x) e^{-ik[l_x - x_0(t)]} + t_0 E_{ref,y}(t - \theta_y) e^{-ikl_y}. \quad (4.18)$$

Todas estas anteriores ecuaciones conforman las ecuaciones en el dominio del tiempo para los campos en un interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

en sus brazos.

Ahora definiremos unas aproximaciones para facilitar el desarrollo de las operaciones matemáticas, por ejemplo para las grandes distancias l_x , l_y y L las redondeamos al número entero mas cercano de longitudes de onda del láser, de tal forma que

$$e^{-ikL} = 1, \quad (4.19)$$

$$e^{-ikl_x} = 1, \quad (4.20)$$

$$e^{-ikl_y} = -1. \quad (4.21)$$

Con estas aproximaciones, el signo menos adquirido en la reflexión del divisor de haz es compensado por el signo menos adquirido durante la propagación sobre la distancia l_y .

Por último asumimos que el divisor de haz no tiene pérdidas y es simétrico, es decir

$$r_0 = t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.22)$$

4.1.2. Franjas en el interferómetro de Michelson

Recombinación de campos

Cuando se produce la recombinación en el divisor de haz, éste no afecta el campo transmitido pero si el campo reflejado, en forma muy significativa. Este efecto se produce debido a que cuando incide una OG en el divisor de haz, el movimiento traslacional de éste genera un cambio en el campo reflejado, de la forma como se muestra en la Figura 4.3, como resultado de este cambio, la longitud de camino óptico para el campo reflejado se incrementa en $x_0(t)$.

Para analizar este efecto, consideraremos el movimiento del divisor de haz en la recombinación de los campos en el interferómetro. Para simplicidad en el análisis asumiremos que el campo del láser es constante, es decir $E_{las}(t) = A$. Hallamos los campos incidentes en las cavidades de los brazos reemplazando las condiciones dadas por las ecuaciones (4.20), (4.21) y (4.22) en las ecuaciones (4.11) y (4.12).

Para el campo en la cavidad del brazo x tenemos

$$\begin{aligned} E_{in,x}(t) &= t_0 E_{las}(t - \theta_x) e^{-ikl_x}, \\ E_{in,x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} A, \end{aligned} \quad (4.23)$$

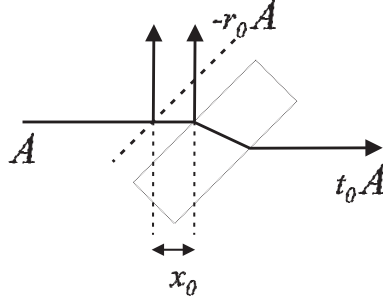


Figura 4.3: Dimensiones de un espejo de un detector de OG.

y para la cavidad del brazo y tenemos

$$\begin{aligned} E_{in,y}(t) &= -r_0 E_{las}(t - \theta_y) e^{-ik[l_y + x_0(t - \theta_y)]}, \\ E_{in,y}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} A e^{-ikx_0(t - \theta_y)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Asumiremos también que las cavidades no están en resonancia y por lo tanto los campos en el interior de las cavidades se pueden despreciar, por lo tanto $E_x = 0$ y $E_y = 0$ y el campo transmitido por la superficie del espejo a dado por E_{int_a} es también cero.

Ahora hallamos los campos reflejados en los brazos de las cavidades tomamos las ecuaciones (4.14) y (4.15) y reemplazamos las condiciones para E_x y E_y .

Por lo tanto, los campos reflejados en las cavidades de los brazos quedan de la siguiente forma, para el brazo x

$$\begin{aligned} E_{ref,x}(t) &= e^{-2ikx_a(t)} \frac{[(r_a^2 + t_a^2)E_{in,x}(t) - t_a E_x(t)]}{r_a}, \\ E_{ref,x}(t) &= e^{-2ikx_a(t)} r_a \frac{1}{\sqrt{2}} A, \end{aligned}$$

y para el brazo y

$$\begin{aligned} E_{ref,y}(t) &= e^{-2iky_a(t)} \frac{[(r_a^2 + t_a^2)E_{in,y}(t) - t_a E_y(t)]}{r_a}, \\ E_{ref,y}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2iky_a(t)} e^{-ikx_0(t - \theta_y)} r_a A. \end{aligned}$$

Entonces, los campos reflejados en las dos cavidades los resumimos en

$$E_{ref,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2ikx_a(t)} r_a A, \quad (4.25)$$

$$E_{ref,y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2iky_a(t)} e^{-ikx_0(t-\theta_y)} r_a A. \quad (4.26)$$

Con esto, los campos recombinados están dados a partir de las ecuaciones (4.17) y (4.18), para el campo simétrico por

$$\bar{E}_{sim}(t) = \frac{r_a A}{2} [e^{-2i(kx_a(t-\theta_x)+kx_0(t))} + e^{-2i(ky_a(t-\theta_y)-kx_0(t-2\theta_y))}], \quad (4.27)$$

y para el campo antisimétrico tenemos que

$$\bar{E}_{ant}(t) = \frac{r_a A}{2} [e^{-2ikx_a(t-\theta_x)+ikx_0(t)} + e^{-2iky_a(t-\theta_y)-ikx_0(t-2\theta_y)}]. \quad (4.28)$$

Si los cambios de fase en las longitudes de camino óptico causados por los movimientos del divisor de haz y de los espejos de entrada, los representamos por α_x y α_y y están dados por

$$\alpha_x(t) = kx_a(t - \theta_x) - \frac{1}{2}kx_0(t), \quad (4.29)$$

$$\alpha_y(t) = ky_a(t - \theta_y) - \frac{1}{2}kx_0(t - 2\theta_y), \quad (4.30)$$

tenemos que los campos simétrico y antisimétrico están dados por

$$\bar{E}_{sim}(t) = \frac{r_a A}{2} [e^{-2i\alpha_x(t)} + e^{-2i\alpha_y(t)}], \quad (4.31)$$

$$\bar{E}_{ant}(t) = \frac{r_a A}{2} [e^{-2i\alpha_x(t)} - e^{-2i\alpha_y(t)}]. \quad (4.32)$$

Finalmente hallamos la intensidad del campo antisimétrico

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ant} &= |\bar{E}_{ant}|^2, \\ \bar{P}_{ant} &= \left| \frac{r_a A}{2} [e^{-2i\alpha_x(t)} - e^{-2i\alpha_y(t)}] \right|^2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

resolvemos aplicando la identidad

$$e^{-2ik\alpha_x(t)} = \cos(\alpha_x(t)) - i \sin(\alpha_x(t)) \quad (4.34)$$

para llegar a

$$\begin{aligned}\bar{P}_{ant} &= \frac{r_a A}{2} \left(\sqrt{4 \sin^2[\alpha_x(t) - \alpha_y(t)]} \right)^2, \\ \bar{P}_{ant} &= r_a A \sin^2[\alpha_x(t) - \alpha_y(t)].\end{aligned}$$

Definimos la potencia del campo del láser $P_{las} = |A|^2$ con lo cual la potencia antisimétrica que describe las variaciones de intensidad (franjas de interferencia) de un interferómetro Michelson formado por los dos espejos de entrada de las cavidades Fabry-Perot y el divisor de haz, queda de la forma

$$\bar{P}_{ant} = P_{las} \sin^2[\alpha_x(t) - \alpha_y(t)] r_a^2. \quad (4.35)$$

4.1.3. Condición de Franja Oscura

Sabemos que la máxima intensidad (franja clara) del campo antisimétrico corresponde a la interferencia constructiva de los campos que se recombinan en el divisor de haz, es decir

$$\text{máx } \bar{P}_{ant} = P_{las} r_a^2. \quad (4.36)$$

Por lo tanto, la mínima intensidad (franja oscura) del campo antisimétrico corresponde a la interferencia destructiva de los campos recombinados, es decir, idealmente la franja oscura está dada por

$$\text{mín } \bar{P}_{ant} = 0, \quad (4.37)$$

lo cual ocurre cuando

$$\alpha_x(t) = \alpha_y(t). \quad (4.38)$$

Si reemplazamos las ecuaciones (4.29) y (4.30) obtenemos la forma mas explícita para esta condición

$$x_a(t - \theta_x) - y_a(t - \theta_y) = \frac{1}{2}[x_0(t) + x_0(t - 2\theta_y)]. \quad (4.39)$$

Teniendo en cuenta que usualmente los espejos suspendidos se mueven muy poco, los retardos θ_x y θ_y pueden ser despreciados, entonces la condición de franja oscura ocurre cuando

$$\begin{aligned}x_a(t) - y_a(t) &= \frac{1}{2}[2x_0(t)], \\ x_0(t) &= x_a(t) - y_a(t).\end{aligned} \quad (4.40)$$

4.2. Respuesta del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

4.2.1. Respuesta a variaciones en la amplitud del láser

En este análisis encontraremos la respuesta del interferómetro a cambios en la amplitud del campo del láser, asumiendo que esta amplitud varía de la forma

$$E_{las}(t) = A + \delta A(t), \quad (4.41)$$

donde A es la amplitud promedio y δA es una pequeña perturbación y se cumple la condición $|\delta A| \ll |A|$. Para este análisis asumiremos que las longitudes de las cavidades de los brazos son fijas, es decir ($\xi_x = \xi_y = 0$) y que se satisface la condición de franja oscura dada por la ecuación (4.40). Por lo tanto, los campos en las cavidades de los brazos los describimos también por las perturbaciones de sus valores estáticos, mediante

$$E_j(t) = \bar{E} + \delta E_j(t), \quad (4.42)$$

donde $j = x, y$, que corresponde a los brazos x y y respectivamente. Hallaremos entonces la solución para la perturbación del campo de la misma forma que lo hicimos anteriormente para encontrar la solución de una sola cavidad por separado. De la ecuación (3.16), teniendo en cuenta las condiciones para ξ , para la amplitud del láser dada por la ecuación (4.41) y para e^{-ikL} dada por la ecuación (4.19), tenemos que el campo interno en una cavidad está dado por

$$E(t) = t_a E_{in}(t) + r_a r_b e^{-2ikL} E(t - 2T),$$

tomando las expresiones para E_{inj} dadas por las ecuaciones (4.11) y (4.12) de donde podemos decir que

$$E_{inj} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{las}(t - \theta_j), \quad (4.43)$$

tenemos entonces que

$$\bar{E} + \delta E(t) = t_a \frac{1}{\sqrt{2}} [A + \delta A(t - \theta_j)] + r_a r_b \delta E(t - 2T),$$

separando y pasando al dominio de Laplace llegamos a

$$\delta \tilde{E}_j(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2s\theta_j} \frac{t_a}{[1 - r_a r_b e^{-2sT}]} \delta \tilde{A}(s),$$

y finalmente con $H(s)$ dada por la ecuación (3.78) llegamos a la expresión para la perturbación del campo en las cavidades de los brazos del interferómetro

$$\delta\tilde{E}_j(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2s\theta_j} H(s) \delta\tilde{A}(s). \quad (4.44)$$

Ahora, hallamos la solución para la perturbación del campo reflejado, tomando la expresión para éste de la ecuación (4.15) y realizando el mismo procedimiento llegamos a

$$\delta\tilde{E}_{ref,j}(s) = -ie^{-s\theta_j} r_a r_b \bar{E} \rho(s) \delta\tilde{A}(s), \quad (4.45)$$

donde $\rho(s)$ está dado por

$$\rho(s) = r_a - \frac{t_a^2 r_b e^{-2sT}}{1 - r_a r_b e^{-2sT}}. \quad (4.46)$$

En esta expresión podemos observar que a bajas frecuencias, las cavidades en los brazos del interferómetro de Michelson reflejan la mínima cantidad del ruido de amplitud del láser si ellos están óptimamente acoplados, es decir con $\rho(0) = 0$.

Por último hallamos la expresión para la perturbación en los campos recombinados a partir de las ecuaciones (4.17) y (4.18)

$$\delta\tilde{E}_{sim}(s) = e^{-2s\bar{\theta}} \rho(s) \delta\tilde{A}(s), \quad (4.47)$$

$$\delta\tilde{E}_{ant}(s) = -2s\theta_\epsilon e^{-2s\bar{\theta}} \rho(s) \delta\tilde{A}(s), \quad (4.48)$$

A partir de estas dos expresiones, podemos hallar el ruido de amplitud del láser

$$\frac{\delta\tilde{E}_{ant}(s)}{\delta\tilde{E}_{sim}(s)} = -2s\theta_\epsilon. \quad (4.49)$$

4.2.2. Respuesta a variaciones en la fase del láser

Para este análisis consideramos la respuesta del interferómetro a cambios en la fase del campo del láser, asumiendo que la amplitud del campo del láser es constante, pero su fase varía de la forma

$$E_{las}(t) = Ae^{i\psi(t)}. \quad (4.50)$$

Y, de la misma forma que para el análisis anterior, asumimos que las longitudes de las cavidades son fijas y que se satisface la condición de franja oscura.

Igualmente, describimos los campos en las cavidades de los brazos del interferómetro mediante la expresión

$$E_j(t) = [\bar{E} + \delta E_j(t)]e^{i\psi(t-\theta_j)}, \quad (4.51)$$

con lo cual, encontramos que la expresión para la perturbación del campo esta dada por

$$\delta \tilde{E}_j(s) = -ie^{-s\theta_j} r_a r_b \bar{E} H_\psi(s) \tilde{\psi}(s), \quad (4.52)$$

y para la perturbación del campo reflejado, queda de la forma

$$\delta \tilde{E}_{ref,j}(s) = ie^{-s\theta_j} t_a r_b \bar{E} H_\psi(s) \tilde{\psi}(s), \quad (4.53)$$

Sin embargo, a diferencia del ruido de amplitud, el ruido de fase del láser no se puede suprimir con la condición de óptimo acoplamiento, ya que no tiene dependencia directa con el coeficiente de acoplamiento $\rho(s)$. Finalmente encontramos las expresiones para los campos recombinados

$$\delta \tilde{E}_{sim}(s) = \sqrt{2}ie^{-2s\bar{\theta}} t_a r_b \bar{E} H_\psi(s) \tilde{\psi}(s), \quad (4.54)$$

$$\delta \tilde{E}_{ant}(s) = -2ie^{-2s\bar{\theta}} s\theta_\epsilon A\rho(s) \tilde{\psi}(s), \quad (4.55)$$

Estas ecuaciones describen los campos recombinados cuando hay variaciones en la fase del láser.

4.2.3. Respuesta al movimiento de los espejos de las cavidades Fabry-Perot

Ahora encontraremos la respuesta del interferómetro al movimiento de los espejos de las cavidades Fabry-Perot en sus brazos, para lo cual definiremos los cambios común y diferencial de las longitudes de las cavidades dados por

$$\xi_{com}(t) = \frac{1}{2}[\xi_x(t) + \xi_y(t)], \quad (4.56)$$

$$\xi_{dif}(t) = \frac{1}{2}[\xi_x(t) - \xi_y(t)], \quad (4.57)$$

Las perturbaciones en los campos de las cavidades, están dadas por las pequeñas variaciones en las longitudes de las cavidades por

$$E_j(t) = \bar{E} + \delta E_j(t), \quad (4.58)$$

y la solución para esta perturbación, la hallamos siguiendo el mismo procedimiento, quedando de la forma

$$\delta \tilde{E}_j(s) = -\frac{ikr_a r_b}{t_a} \bar{E} H(s) \tilde{\xi}_j(s). \quad (4.59)$$

y para los campos recombinados queda de la forma

$$\delta \tilde{E}_{sim}(s) = 2\sqrt{2}ikr_b \bar{E} e^{-s\bar{\theta}} H(s) [\tilde{\xi}_{com}(s) - s\theta_\epsilon \tilde{\xi}_{dif}(s)], \quad (4.60)$$

$$\delta \tilde{E}_{ant}(s) = 2\sqrt{2}ikr_b \bar{E} e^{-s\bar{\theta}} H(s) [\tilde{\xi}_{dif}(s) - s\theta_\epsilon \tilde{\xi}_{com}(s)]. \quad (4.61)$$

En estas expresiones podemos ver que se presentan mezclas entre los cambios en modo diferencial y común debido a la asimetría. Sin embargo, mientras la asimetría es pequeña, o las frecuencias de interés son bajas, es decir $|s\theta_\epsilon| \ll 1$, podemos despreciar esta mezcla y llegar a las siguientes aproximaciones

$$\delta \tilde{E}_{sim}(s) = 2\sqrt{2}ikr_b \bar{E} e^{-s\bar{\theta}} H(s) \tilde{\xi}_{com}(s), \quad (4.62)$$

$$\delta \tilde{E}_{ant}(s) = 2\sqrt{2}ikr_b \bar{E} e^{-s\bar{\theta}} H(s) \tilde{\xi}_{dif}(s). \quad (4.63)$$

Estas expresiones describen los campos recombinados del interferómetro cuando hay movimiento de los espejos en las cavidades, los cuales tienen dependencia con las variaciones ξ en la longitud de las mismas.

Capítulo 5

Simulación del prototipo de detección de OG

Anteriormente se construyó un pequeño prototipo simulador de detección de OG, el cual fue la base para el desarrollo del presente proyecto. En este capítulo describiremos las características y los parámetros del mismo, siguiendo el análisis que hemos realizado en los capítulos anteriores. También presentaremos la respuesta del interferómetro de Michelson antes y después de la implementación de las cavidades Fabry-Perot en sus brazos.

5.1. Características y parámetros del prototipo

Nuestro prototipo simulador de detección de OG tiene la configuración del interferómetro de Michelson, con longitudes de los brazos de $0,5m$ y los elementos ópticos como los espejos y el divisor de haz están sobre bases rígidas y es mostrado en la Figura 5.1. Ha sido diseñado y construido con fines didácticos y de acuerdo con los recursos económicos del proyecto.

Después de realizar el análisis descrito en los capítulos anteriores, procedimos a hallar los valores de los parámetros que aplican a nuestro prototipo y realizar una comparación de estos con los parámetros del detector real de OG LIGO. Cabe mencionar que los valores de nuestro prototipo se encontraran muy desfasados de los valores de LIGO ya que nuestros elementos ópticos no son de la alta calidad de los elementos de los detectores reales.

Parámetros

Tabla 5.1: Parámetros del láser de entrada

Parámetro	notación	valor	unidades
Longitud de onda	λ	632,8	nm
Frecuencia	ν	$4,74 \times 10^{-9}$	Hz

Tabla 5.2: Parámetros de los espejos

Espejo	t^2	L	t	r
Inicial de la cavidad	0,176	0,168	0,42	0,9958
Final de la cavidad	0,176	0,168	0,42	0,9958

Tabla 5.3: Parámetros de las cavidades Fabry-Perot

Parámetro	notación	valor	unidades
Longitud	L	0,5	m
Tiempo de retardo	T	$1,66 \times 10^{-9}$	seg
Rango espectral libre	ν_{FSR}	300×10^6	Hz
Coefficiente de fineza	F	$38,658 \times 10^4$	-
Fineza	F	373,31	-
Número efectivo de vueltas completas	N_{eff}	118,79	-
Tiempo de almacenamiento	τ	$3,94 \times 10^{-7}$	seg
Ganancia	g	50,1	-

Tabla 5.4: Parámetros del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

Parámetro	notación	valor	unidades
Longitud de los brazos	L	0,5	m
Longitud del divisor al espejo de entrada brazo x	l_x	0,05	m
Longitud del divisor al espejo de entrada brazo y	l_y	0,05	m
Longitud promedio	l	4,78	m



Figura 5.1: Prototipo de interferómetro de Michelson

5.2. Parámetros del detector de OG LIGO

En esta sección presentamos los parámetros de operación del detector de OG LIGO, como una forma de comparación con los parámetros de nuestro prototipo. Se puede observar fácilmente que los valores varían en grandes cantidades para los dos instrumentos, lo que nos permite concluir que para nuestros recursos económicos, físicos y de infraestructura no es posible construir un detector, ni tampoco un prototipo empleado para fines de detección, razón por la cual nuestro prototipo es utilizado como instrumento didáctico a manera de enseñanza para presentar e incentivar a los alumnos a iniciar investigación en el área experimental de las OG.

Tabla 5.5: Parámetros del láser

Parámetro	notación	valor	unidades
Longitud de onda	λ	$1,064 \times 10^{-6}$	m
Frecuencia	ν	$2,818 \times 10^{14}$	Hz

Tabla 5.6: Parámetros de los espejos

Espejo	t^2	L	t	r
Inicial de la cavidad	0,03	5×10^{-5}	0,173	0,985
Final de la cavidad	2×10^{-5}	5×10^{-5}	$4,5 \times 10^{-3}$	0,999965

Tabla 5.7: Parámetros de las cavidades Fabry-Perot

Parámetro	notación	valor	unidades
Longitud	L	$4x10^{-3}$	m
Tiempo de retardo	T	$1,33x10^{-5}$	seg
Rango espectral libre	ν_{FSR}	$3,75x10^4$	Hz
Coefficiente de fineza	F	$1,71x10^4$	-
Fineza	F	205	-
Número efectivo de vueltas completas	N_{eff}	65,4	-
Tiempo de almacenamiento	τ	$1,74x10^{-7}$	seg
Ganancia	g	11,4	-

Tabla 5.8: Parámetros del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

Parámetro	notación	valor	unidades
Longitud de los brazos	L	4000	m
Longitud del divisor al espejo de entrada brazo x	l_x	4,93	m
Longitud del divisor al espejo de entrada brazo y	l_y	4,63	m
Longitud promedio	l	4,78	m

5.3. Simulación de una cavidad Fabry-Perot

Después de realizar el análisis matemático de la respuesta de una cavidad Fabry-Perot, pasamos a la simulación de la misma por medio de Matlab. En la simulación tomamos en cuenta el grosor del espejo inicial de la cavidad, denominado para este efecto a , y el espejo final lo tomamos como plano, ya que en condiciones reales, este grosor en el espejo inicial afecta el campo en la cavidad, debido a que el haz del láser sufre cambios por los coeficientes de reflexión y transmisión del mismo.

En la Figura 5.1 se puede observar el diagrama esquemático de una cavidad Fabry-Perot que utilizamos para nuestra simulación, en ella podemos ver que hay un número de haces transmitidos por los dos espejos los cuales tienen amplitudes complejas de haces sucesivos multiplicados por un factor adicional de $r_a r_b e^{-2ikl}$.

En la sección 3.4 encontramos la respuesta del campo en la cavidad Fabry-Perot, ahora tomamos estas expresiones y suponemos todos los haces dentro de la cavidad igualmente espaciados, y finalmente hallamos la amplitud del campo de salida de la cavidad mediante la suma de las amplitudes de los haces individuales, siendo esta

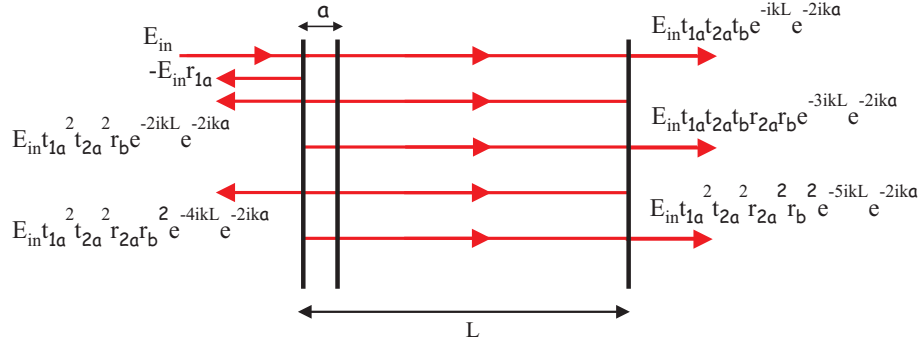


Figura 5.2: Diagrama esquemático de una cavidad Fabry-Perot

expresión una serie geométrica convergente dada por

$$E(t) = E_{in}(t) \frac{t_{1a}^2 t_{2a}^2 r_b e^{-2ika} e^{-2ikd(t)}}{1 - r_a r_b e^{-2ikd(t)}}, \quad (5.1)$$

Seguidamente, teniendo en cuenta los valores de los parámetros dados para el detector LIGO, tomamos en cuenta para realizar la simulación los siguientes datos: coeficiente de transmisión $t = 0,173$, coeficiente de reflexión $r = 0,985$, longitud de onda $= 632nm$, grosor del espejo inicial de las cavidades Fabry-Perot $= 1ml$ y graficamos esta expresión, para poder observar en la salida de la cavidad los cambios en la intensidad del campo, lo que nos representa las franjas de interferencia producidas por los multiples haces.

En la Figura 5.2 se muestran las franjas de interferencia producidas por una cavidad Fabry-Perot y en la Figura 5.3 el corte transversal de distribución de intensidad de campo de estas franjas.

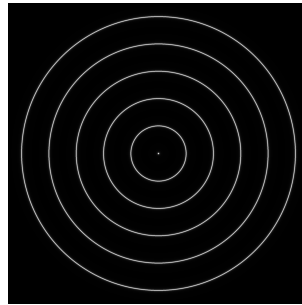


Figura 5.3: Franjas de interferencia en la salida de una cavidad Fabry-Perot

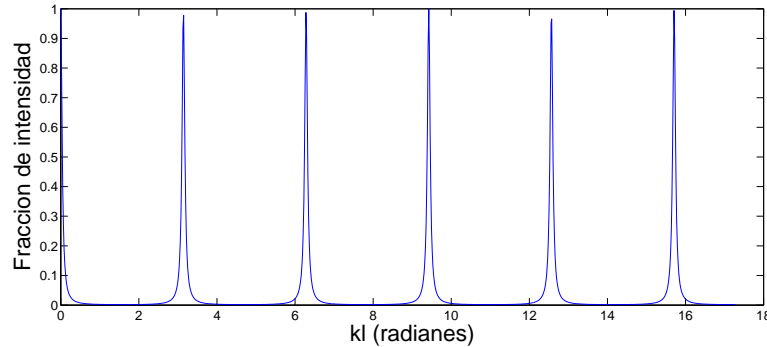


Figura 5.4: Fracción de intensidad de campo en la salida de una cavidad Fabry-Perot

5.3.1. Simulación del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

Como lo detallamos en el capítulo 4, la respuesta de un interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot en sus brazos, está dada por las respuestas individuales de los campos de las cavidades recombinados en el divisor de haz mediante la ecuación (4.18), cuya potencia esta dada en (4.35). Teniendo en cuenta estas ecuaciones, simulamos un interferómetro de Michelson con dos cavidades Fabry-Perot, asumiendo inicialmente que la diferencia de fase entre los dos haces de los campos en las cavidades es cero, y posteriormente variando esta diferencia de tal forma que podamos observar los movimientos en las franjas de interferencia en el puerto antisimétrico del interferómetro.

Tomando las respuestas individuales de las dos cavidades Fabry-Perot en los brazos del interferómetro halladas en la sección anterior, y recombinados estas mediante la ecuación (4.35), obtenemos en el puerto antisimétrico del interferómetro una distribución de franjas de interferencia mostrada en la Figura 5.5 para el caso particular cuando no hay diferencia de camino óptico entre los dos brazos del interferómetro. En este caso, podemos observar que en la salida del interferómetro la intensidad detectable dada por la ecuación (4.35) Ahora, variamos la longitud de camino óptico en una de las cavidades en los brazos de interferómetro, con lo cual simulamos el efecto que produciría una OG incidente, generándose así, en el puerto antisimétrico una diferencia de fase entre los dos haces de los brazos del interferómetro que produce un desplazamiento de las franjas de interferencia que se puede observar en las Figuras 5.6. y 5.7. En las gráficas anteriores se puede observar el desplazamiento de las franjas de interferencia en la salida del interferómetro debido a la diferencia de fase existente entre los dos haces en las cavidades de los brazos del mismo, ésta diferencia de fase se produce como consecuencia de la variación del camino óptico

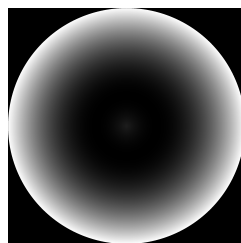


Figura 5.5: Franjas de interferencia en el puerto antisimétrico del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot.

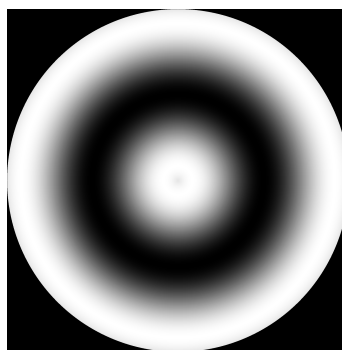


Figura 5.6: Franjas de interferencia en el puerto antisimétrico del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot cuando hay diferencia de camino óptico entre éstas

en uno de los brazos debido a la incidencia de una OG sobre el interferómetro. Es el desplazamiento de las franjas de interferencia lo que, en un detector real, indica si está o no incidiendo una OG.

5.4. Perspectivas del montaje experimental del prototipo de interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot

En esta sección describiremos las condiciones generales de la construcción del prototipo de interferómetro de Michelson con dos cavidades Fabry-Perot en sus brazos, teniendo en cuenta las condiciones de infraestructura y equipo con las cuales se cuenta actualmente para este fin.

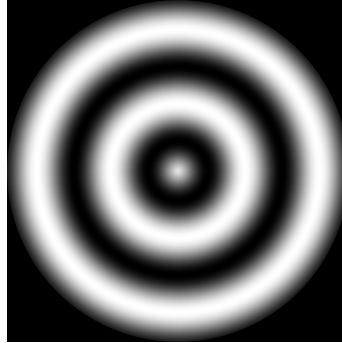


Figura 5.7: Franjas de interferencia en el puerto antisimétrico del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot cuando hay diferencia de camino óptico entre éstas

Es importante tener en cuenta que el prototipo que se desea construir tiene como característica principal que es rígido, es decir los elementos ópticos no están suspendidos en péndulos como los detectores o prototipos a gran escala. En la figura 7.12 se muestra el montaje experimental propuesto para nuestro prototipo, el cual se basa en un interferómetro de Michelson con dos cavidades Fabry-Perot de $0,5m$ de longitud en sus brazos.

El laser empleado para tal fin tiene una longitud de onda de $632,8nm$, esta polarizado linealmente y tiene una potencia de $15mW$, además a la salida de este empleamos un filtro espacial y una lente colimadora, con lo cual en la entrada del interferómetro tenemos un haz del láser filtrado y colimado.

El divisor de haz y las dos cavidades Fabry-Perot forman el prototipo de interferómetro de Michelson Fabry-Perot y la señal de salida de este es tomada del haz reflejado en las dos cavidades y recombinado en el divisor.

La propuesta de diagrama esquemático para el prototipo simulador de detección de OG se muestra en la Figura 13, y comprende el sistema de simulación de la incidencia de una OG, mediante el cual es posible recrear el movimiento de los espejos de la misma forma en que lo haría una OG si incidiera sobre el prototipo y el sistema de control, el cual teniendo en cuenta la condición de resonancia dada por la longitud de la cavidad nos permite mantener al instrumento en esta posición de referencia.

El funcionamiento es el siguiente: al simular la incidencia de una OG, las platafor-

mas motorizadas realizaran el movimiento igual al efecto que produce una OG sobre el prototipo, el cual es alargando la longitud de una cavidad (*brazo x*) y acortándola en la otra (*brazo y*); en el puerto antisimétrico, a la salida del interferómetro se ubica un fotodetector en el cual es posible observar las franjas de interferencia producidas, y finalmente se toma esta señal de salida y es comparada con la condición de resonancia.

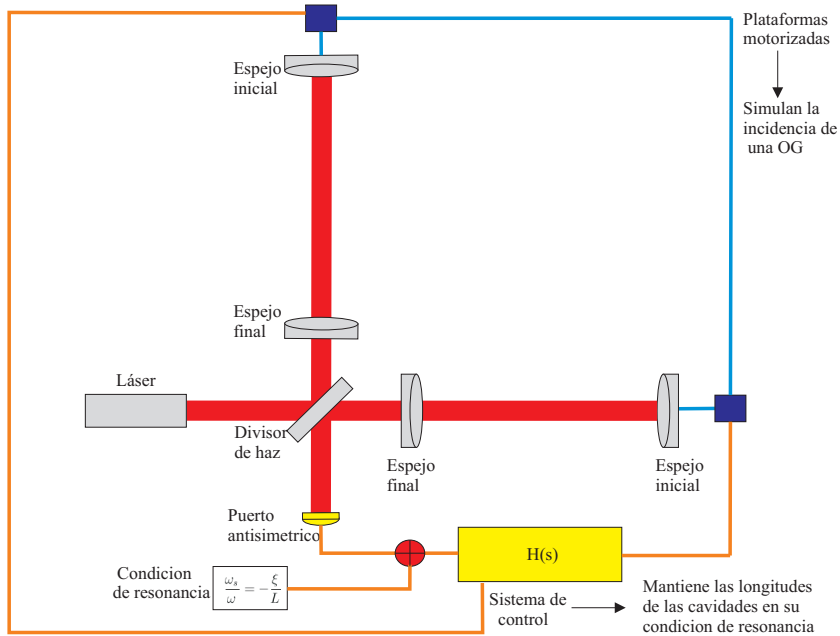


Figura 5.8: Diagrama esquemático de la propuesta del prototipo simulador de detección de OG

Capítulo 6

Conclusiones

En este proyecto se realizó la descripción y el análisis de la dinámica de los campos y los espejos dentro de un detector de OG con la configuración del interferómetro de Michelson con cavidades Fabry-Perot en sus brazos. La dinámica de los campos se formuló en términos de ecuaciones en diferencia en el dominio del tiempo y teniendo en cuenta el tiempo de tránsito de la luz dentro de las cavidades ya que éste afecta en gran medida la operación del interferómetro.

Las soluciones para las ecuaciones de campos en las cavidades fueron halladas para el estado estable ya que es importante estudiar el interferómetro durante su operación continua y pueden usarse para estimar la respuesta en frecuencia del mismo al describirlas en el dominio de Laplace, el cual también fue realizado en este proyecto.

El análisis fue desarrollado para describir el funcionamiento de una cavidad Fabry-Perot inicialmente y después para describir la operación de un interferómetro de Michelson cuando dos cavidades son implementadas en sus brazos. Se encontró la función de transferencia de una cavidad Fabry-Perot general y sus diferentes modificaciones cuando se presentan variaciones en los parámetros que afectan la operación de la cavidad, como lo son la amplitud, fase y frecuencia del láser y la longitud de la misma. Para cada uno de estos parámetros se encontró una función de transferencia que describe la respuesta de la cavidad Fabry-Perot.

Seguidamente, este análisis realizado nos proporciona los parámetros y características del detector de OG LIGO, el cual fue tomado como detector de referencia, y una estimación de los valores que debe presentar el prototipo de interferómetro de Michelson cuando sea implementado.

Las simulaciones nos permitieron ver el comportamiento de una cavidad Fabry-

Perot y las franjas de interferencia producida por la interferencia de múltiples haces dentro de la misma. Al realizar la simulación del interferómetro de Michelson con dos cavidades Fabry-Perot en sus brazos, pudimos observar el movimiento de las franjas de interferencia cuando existe una diferencia de camino óptico producida por la posible incidencia de una OG sobre el mismo.

Este proyecto permitió continuar con trabajos en este nuevo campo de investigación en nuestro Centro Universitario sobre la parte experimental de las OG, ya que se ahondo mas en el tema de los detectores de OG y las cavidades Fabry-Perot, con lo cual queda abierto el espacio para continuar trabajando en otras técnicas importantes desarrolladas dentro de los detectores reales de OG, tales como Power Recycling.

Aunque el objetivo inicial fue implementar físicamente las cavidades Fabry-Perot dentro del prototipo simulador de detección de OG, se intentó realizar un análisis completo que permitirá a futuros proyectos la aplicación experimental.

Este trabajo fue presentado en eventos de orden nacional e internacional, con lo cual fue posible dar a conocer a la comunidad científica que en nuestro Centro Universitario se esta trabajando con prototipos simuladores de detección de OG. Todas estas participaciones permitieron un intercambio de información importante para el desarrollo del proyecto y un crecimiento profesional para los participantes del mismo.

Continuar con este tema de la detección de OG permitirá en el futuro abarcar mas a fondo todas las técnicas empleadas en la detección de OG, desarrollar experimentos y puestas en marcha de pequeños prototipos de detectores de OG y seguir creciendo como grupo de investigación.

Bibliografía

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1973).
- [2] B. F. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press (1985).
- [3] K. S. Thorne, Gravitational radiation, in: *Three hundred years of gravitation*, eds: S. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press (1987).
- [4] R. A. Hulse and J. H. Taylor, *Astrophysical Journal* 195 (1975) L51.
- [5] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, *Astrophysical Journal* 345 (1989) 434.
- [6] J. H. Taylor, Testing relativistic gravity with binary and millisecond pulsars in: *General relativity and gravitation* p. 287-294, eds: R. J. Gleiser, C. N. Kozameh, and O. M. Moreschi, Institute of Physics (1993).
- [7] Weber, J. Evidence or discovery of gravitational radiation. *Phys. Rev. Lett* 22, 1320-1324. 1969. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.22.1320>.
- [8] R. Weiss, Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna, *Quarterly Progress Report of the Research Laboratory of Electronics of the Massachusetts Institute of Technology* 105 (1972) 54.
- [9] G. E. Moss, L. R. Miller, and R. L. Forward, *Applied Optics* 10 (1971) 2495.
- [10] A. Abramovici, W. E. Althouse, R. W. P. Drever, Y. G\"urzel, S. Kawamura, F. J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. E. Spero, K. S. Thorne, R. E. Vogt, R. Weiss, S. E. Whitcomb and M. E. Zucker, *Science* 256 (1992) 325.
- [11] The VIRGO collaboration, *VIRGO Final Design Report* (1997).
- [12] K. Danzmann, H. Luck, A. Rudiger, R. Schilling, M. Schrempel, W. Winkler, J. Hough, G. P. Newton, N. A. Robertson, H. Ward, A. M. Campbell, J. E. Logan, D. I. Robertson, K. A. Strain, J. R. J. Bennett, V. Kose, M. Kuhne, B.

- F. Schutz, D. Nicholson, J. Shuttleworth, H. Welling, P. Aufmuth, R. Rinkleff, A. Tunnermann and B. Willke, Proposal for a 600m Laser-Interferometric Gravitational Wave Antenna, Max-Planck-Institut für Quantenoptik Report 190, Garching (Germany) (1994).
- [13] K. Tsubono, 300-m Laser Interferometer Gravitational Wave Detector (TAMA300) in Japan, in: Gravitational Wave Experiments p. 112-114, eds: E. Coccia, G. Pizzella, and F. Ronga, World Scientific (1995) .
- [14] S. Kawamura, J. Hazel, and M. Barton, "Large Optics Suspension final design (mechanical system)", LIGO technical report T970158, California Institute of Technology, Pasadena, 1997.
- [15] A. Einstein, "Approximative integration of the field equations of gravitation" in The Collected Papers of Albert Einstein, Princeton University Press, 1987.
- [16] Claudia Moreno, R. García-Salcedo, Arturo Lara, Jaime Ramírez (2008). Introducción a las ondas gravitacionales. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 2, No. 3. 311-319.
- [17] A. Gillespie, and F. Raab, Physics Letters A 178 (1993) 357.
- [18] A. Gillespie, and F. Raab, Physics Letters A 190 (1994) 213.
- [19] T. Uchiyama, D. Tatsumi, T. Tomaru, M. E. Tobar, K. Kuroda, T. Suzuki, N. Sato, A. Yamamoto, T. Haruyama, T. Shintomi, Physics Letters A 242 (1998) 211.
- [20] A. Masaki. Power recycling for an interferometric gravitational wave detector. (1998).
- [21] T. Nakamura, in: Detection of gravitational waves (in Japanese), eds: T. Nakamura, N. Mio, M. Ohashi, Kyoto University Academy Press (1998).
- [22] Kip S. Thorne, in: Proceedings of the Snowmass 95 Summer Study on Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology, eds: E. W. Kolb and R. Peccei, World Scientific (1995).
- [23] P. Bender, A. Brillet, I. Ciufolini, A. M. Cruise, C. Cutler, K. Danzmann, F. Fiducaro, W. M. Folkner, J. Hough, P. McNamara, M. Peterseim, D. Robertson, M. Rodrigues, A. Rüdiger, M. Sandford, G. Schäfer, R. Schilling, B. Schutz, C. Speake, R. T. Stebbins, T. Sumner, P. Touboul, J.-Y. Vinet, S. Vitale, H. Ward, W. Winkler, LISA Pre-Phase A Report Second Edition (1998).
- [24] R. A. Hulse and J. H. Taylor, Astrophysical Journal 195 (1975) L51.

- [25] J. Hough, S. Rowan. Gravitational Wave Detection by Interferometry. Living Review (2000). [<http://relativity.livingreviews.org/Articles/subject.html>]
- [26] J. Weber, Physical Review 117 (1960) 306.
- [27] J. Weber, Physical Review Letters 22 (1969) 1320
- [28] K. Tsubono, 300-m Laser Interferometer Gravitational Wave Detector (TAMA300) in Japan, in: Gravitational Wave Experiments p. 112-114, eds: E. Coccia, G. Pizzella, and F. Ronga, World Scientific (1995) .
- [29] S. Miyoki, *Development of a 100-meter Delay-Line Laser Interferometer*, Ph.D thesis, University of Tokyo (1996).
- [30] N. Mio, in: Technical investigation of gravitational wave antennas (in Japanese), eds: N. Mio, M. Ohashi, (1992).
- [31] C. M. Caves, Physical Review D 23 (1981) 1693.
- [32] G. Airy, *Mathematical Tracts on the Lunar and Planetary Theories*. Cambridge, second ed., 1831.
- [33] G. Airy, *On the phenomena of Newton rings when formed between two transparent substances of different refractive powers*, Philosophical Magazine, vol. 2, 1833.
- [34] R. Pound and G. Rebka, *Apparent weight of photons*, Physical Review Letters, vol. 4, 1960.
- [35] R. Vogt, R. Drever, F. Raab, K. Thorne, and R. Weiss, *A Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory (LIGO)*, proposal to the National Science Foundation, California Institute of Technology, Massachusetts Institute of Technology, 1989.
- [36] B. Offrein, H. Hoekstra, J. van Loenen, A. Driessen, and T. Popma, *Response measurements of a Fabry-Perot to short pulses*, Optics Communications, vol. 112, 1994.